האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

# <u>מבחן באלגברה לינארית 1 (80134)</u>

## מועד א', תשס"ח – 8.2.08

המורים: פרופ' א. ריפס וד"ר א. בגנו משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר אסור בשימוש. נא כתבו בעט (לא אדום) על צידה השמאלי של המחברת, ולא בשוליים.
נא כתבו על מחברת הבחינה את שם המורה שאתם רשומים אליו.

**שימו לב: יש לענות בפירוט ובכתב ברור.**

**<u>חלק א'</u>**

**יש לענות על 2 מתוך 3 השאלות. (20 נק' לכל שאלה):**

1. יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד $n$ מעל שדה $F$. הוכיחו כי $V \approx F^n$.

2. יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד $n$. יהי $V^*$ מרחב הפונקציונלים הלינאריים של $V$. יהי $B=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ בסיס של $V$.
   א. הגדירו את הבסיס הדואלי ל-$B$. (5 נקודות).
   ב. הוכיחו שהבסיס הדואלי הוא אכן בסיס. (15 נקודות).

3. יהיו $V$ ו-$W$ מרחבים וקטוריים מעל שדה $F$. יהי $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ בסיס ל-$V$, ו- $(w_1,w_2,\cdots,w_n)$ סדרה של איברים ב-$W$. הוכיחו שקיימת העתקה לינארית אחת ויחידה $T:V\to W$ כך ש- $\forall i: T(v_i)=w_i$.

**<u>חלק ב'</u>**

**יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. (15 נק' לכל שאלה):**

1. יהי $V$ מרחב וקטורי ממימד סופי, תהי $A$ תת-קבוצה סופית של $V$, ויהיו $v,w\in V$ כך שמתקיים: $v\in Sp(A\cup\{w\}), v\notin Sp(A)$. הוכיחו:
   א. $w\notin Sp(A)$
   ב. $w\in Sp(A\cup\{v\})$

2. יהיו $T_A,T_B:F^n\to F^n$ העתקות לינאריות, ויהיו $A,B$ מטריצות הייצוג המתאימות לפי הבסיסים הסטנדרטיים.
   א. הוכיחו ש: $KerT_B\subseteq Ker(T_AT_B)$ (5 נקודות).
   ב. הוכיחו שאם $AB=I$ אז $BA=I$. (10 נקודות).

3. יהיו $W_1$ ו- $W_2$ תתי מרחבים של מרחב המטריצות הריבועיות מסדר $2\times 2$ מעל שדה הממשיים: $V=M_2(\mathbb{R})$.
   לגבי כל אחד מהסעיפים הבאים הוכח או תן דוגמא נגדית: (לכל סעיף 5 נקודות).
   א. אם $\dim W_1\geq 2$ ו- $\dim W_2\geq 2$ אז $V=W_1+W_2$.
   ב. אם $\dim W_1=2$ ו- $\dim W_2=3$ וגם $W_1\not\subset W_2$ אז $V=W_1+W_2$.
   ג. אם $V=W_1+W_2$ ו- $\dim W_1=1$ אז הסכום $W_1+W_2$ הוא ישר (כלומר $W_1\cap W_2=\{0\}$).

4. תהי $Ax=b$ מערכת אי-הומוגנית ב-3 נעלמים. הוכיחו:
   א. אם $v_1,v_2$ פתרונות למערכת $Ax=b$ אז $v_1-v_2$ פתרון למערכת ההומוגנית $Ax=0$. (5 נקודות).
   ב. אם $(1,-4,0),(1,-2,-1),(1,-2,1)$ פתרונות למערכת $Ax=b$ אז $(1,0,0)$ **איננו** פתרון למערכת ההומוגנית $Ax=0$. (רמז: תוכלו להשתמש בסעיף הקודם ובתוצאה של משפט המימדים). (10 נקודות).

5. תהי $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ מוגדרת ע"י: $T(P(x))=P(x+1)-P(x)$.
   א. הוכיחו ש-$T$ לינארית. (5 נקודות).
   ב. מצאו את מטריצת הייצוג של $T$ לפי הבסיס $\{1,x,x^2,x^3\}$ (גם בתחום וגם בטווח.) (10 נקודות).

**<u>בהצלחה!</u>**

# טופס נלווה לבחינה באלגברה ליניארית 1 (80134)

## מועד א', שנה"ל תשס"ח

**נא למלא טופס זה ואת מחברת הבחינה <u>בעט</u> בלבד (לא אדום) ולצרפו למחברת הבחינה.**
**נא לכתוב רק בצידה <u>השמאלי</u> של המחברת, ולא בשוליים.**

תאריך: 8.2.08

מספר הסטודנט/ית: ____________

מספר מחברת: ________

**רשמו במשבצות המתאימות באילו מן המחברות שכתבתם מופיעה התשובה:**

| | (הקיפו בעיגול) | נמצא במחברת מס' | ציון (לשימוש הבודק/ת) | שם הבודק/ת |
|---|---|---|---|---|
| חלק א' | שאלה 1 | | | |
| | שאלה 2 | | | |
| | שאלה 3 | | | |
| | | | | |
| חלק ב' | שאלה 1 | | | |
| | שאלה 2 | | | |
| | שאלה 3 | | | |
| | שאלה 4 | | | |

ציון בחינה: ________