

80. 134  
12/50P1

בס"ד

מבחן באלגברה ליניארית 1  
סמסטר א מועד ב תשס"ז  
מרצים: פרופסור אליהו ריפס, ד"ר אלי בגנו.  
משך המבחן: שלש שעות.  
חומר עזר: אסור.

נא לכתוב בעט על צידה השמאלי של המתברת, ולא לכתוב בשוליים.

## חלק א

ענו על שתיים מתוך שלש השאלות הבאות.

### שאלה 1 (20 נק')

נתונה מערכת המשוואות  $Ax = b$  כאשר  $A \in M_{m,n}(F)$  ו-  $b \in F^m$ . נגדיר את ההעתקה הליניארית:  
 $T_A : F^n \rightarrow F^m$  ע"י  $T_A(v) = Av$  לכל  $v \in F^n$ . יהי  $x_0 \in F^n$  פתרון של המערכת.  
הוכיחו כי  $T_A^{-1}(b) = x_0 + \text{Ker}T_A$ .

### שאלה 2 (20 נק')

יהי  $V$  מרחב וקטורי ויהי  $U \leq V$  (תת מרחב). הוכיחו שאם  $\dim U = \dim V$  אז  $U = V$ .

### שאלה 3 (20 נק')

תהי  $K = \{v_1, \dots, v_n\}$  קבוצת וקטורים במרחב וקטורי  $V$ . הוכיחו:  
(א)  $\text{Sp}\{K\} \leq V$   
(ב)  $K \subseteq \text{Sp}\{K\}$   
(ג) אם  $W$  תת מרחב של  $V$  המכיל את  $K$  אז  $\text{Sp}(K) \subseteq W$ .

## חלק ב'

ענו על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות.

### שאלה 4 (15 נק')

האם קיימת העתקה ליניארית  $T: R^3 \rightarrow R^3$  כך ש-  
 $T(1, 2, -1) = (1, 0, 1)$   
 $T(1, -1, 2) = (0, 1, 1)$  . הוכיחו תשובתכם!  
 $T(-1, 10, -11) = (0, 0, 1)$

### שאלה 5 (15 נק')

יהיו  $F = Z_2, V = Z_8$ . נגדיר ב-  $V$  פעולת חיבור ע"י  $y \oplus x = x +_8 y$  (הוא החיבור מודולו 8).  
 האם ניתן להגדיר כפל בסקלר ב-  $V$  מעל  $F$ , שיסומן  $\odot$ , כך ש-  $V$  יהיה מרחב וקטורי מעל  $F$  עם הפעולות  
 הללו? הוכיחו תשובתכם!

### שאלה 6 (15 נק')

יהיו  $u_1 = (3, 1, 0, 2) \in R^4, v_1 = (1, 2, 0, 1), v_2 = (2, 1, 0, 3)$ . מצאו  $u_2 \in R^4$  כך ש-  
 $Sp\{v_1, v_2\} \cap Sp\{u_1, u_2\} = \{0\}$  . הוכיחו תשובתכם!

### שאלה 7 (15 נק')

יהי  $R_2[x]$  מרחב הפולינומים מעל  $R$  מדרגה לכל היותר 2. תהי  $T: R_2[x] \rightarrow R_2[x]$  ההעתקה המוגדרת ע"י  
 $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_0 + 2a_1x + 4a_2x^2$

(א) הוכיחו ש  $T$  העתקה ליניארית.  
 (ב) יהיו  $B = \{1, x + 1, x^2 - x + 1\}$  שני בסיסים של  $R_2[x]$ . מצאו את  $[T]_C^B$ .  
 $C = \{1, x - 1, x^2 + 2x + 1\}$

### שאלה 8 (15 נק')

יהי  $V$  מרחב וקטורי ותהי  $T: V \rightarrow V$  העתקה ליניארית. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:  
 (א)  $KerT \neq \{0\}$ .  
 (ב) יש העתקה ליניארית  $S: V \rightarrow V$  שאינה העתקת האפס כך ש  $T \circ S = 0$  (כאשר 0 היא העתקת האפס).

**בהצלחה!**