80.134
תשס"ז /א/

בס"ד

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

מבחן באלגברה ליניארית 1 (80134)
סמסטר א מועד א תשס"ז - 4.2.07
מרצים: פרופסור אליהו ריפס, ד"ר אלי בגנו.
משך המבחן: שלש שעות.
חומר עזר: אסור.

<u>נא לכתוב בעט על צידה השמאלי של המחברת, ולא לכתוב בשוליים.</u>

חלק א

ענו על שתיים מתוך שלש השאלות הבאות.

שאלה 1 (20 נק')

יהיו V,W מרחבים וקטורים מעל שדה F. יהיו $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V ו $w_1,\dots,w_n$ וקטורים כלשהם ב W.
א) הוכיחו כי יש העתקה ליניארית $T:V\to W$ כך שלכל $1\le i\le n$ $T(v_i)=w_i$.
ב) הוכיחו שאם $S:V\to W$ העתקה ליניארית המקיימת שלכל $1\le i\le n$, $S(v_i)=T(v_i)$, אז $S=T$.

שאלה 2 (20 נק')

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. יהיו $v_1,\dots,v_n\in F$ וקטורים תלויים ליניארית. נניח שלכל $1\le i\le n$, $v_i\ne 0$. הוכיחו שיש וקטור מתוך $v_1,\dots,v_n$ שהינו צירוף ליניארי של קודמיו.

שאלה 3 (20 נק')

יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל שדה F. יהיו $v_1,\dots,v_m$ וקטורים בלתי תלויים ליניארית ב- V. הוכיחו שיש $w_{m+1},\dots,w_n$ כך ש $v_1,\dots,v_m,w_{m+1},\dots,w_n$ בסיס של V.

חלק ב'

ענו על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות.

שאלה 4 (15 נק')

האם קיימת העתקה ליניארית $T:R^3\to R^3$ כך ש-
$$T(-1,7,8)=(3,0,5)$$
$$T(1,2,-1)=(1,0,1)$$
$$T(1,-1,2)=(0,1,1)$$
? הוכיחו תשובתכם!

80.134

תשס"ג / א 1

שאלה 5 (15 נק')

על $V=R$ נגדיר פעולות חיבור וכפל בסקלר מהשדה R באופן הבא: $\begin{array}{l} x\oplus y=x+y-1 \\ \alpha\odot x=\alpha(x-1)+1 \end{array}$. האם V מרחב וקטורי מעל R ביחס ל $\oplus,\odot$? הוכיחו תשובתכם!

שאלה 6 (15 נק')

נתונה מערכת ליניארית $Ax=b$ כאשר $\begin{array}{l} A\in M_{m,n}(F) \\ b\in F^m \end{array}$.

א) הוכיחו או הפריכו: אם x_1,x_2 פתרונות של המערכת הנ"ל אז לכל $c\in F$, $cx_1+(1-c)x_2$ גם פתרון של המערכת הנ"ל.

ב) הוכיחו או הפריכו: אם $b\neq 0$ ואם x_1,x_2 פתרונות של המערכת אז x_1+x_2 אינו פתרון של המערכת.

שאלה 7 (15 נק')

יהי $B=\{(1,2,0),(0,1,1),(2,1,0)\}$ בסיס סדור של Z_5^3 (כמרחב וקטורי מעל Z_5). יהי $C=\{(2,1),(1,4)\}$ בסיס סדור של Z_5^2 (כמרחב וקטורי מעל Z_5).

נגדיר $T:Z_5^3\to Z_5^2$ ע"י $T(x,y,z)=(x+y-z,x-y-2z)$.

א) מצאו את $[T]_C^B$.

ב) השתמשו ב- $[T]_C^B$ כדי לחשב את $[T(1,2,1)]_C$.

שאלה 8 (15 נק')

תהי $T:R^2\to R^2$ העתקה ליניארית. הוכיחו כי T מעבירה כל תת מרחב לעצמו (כלומר לכל $W\le R^2$ ולכל $w\in W$ מתקיים $T(w)\in W$) אם ורק אם יש $c\in R$ כך ש $T=c\cdot Id_{R^2}$. (Id_{R^2} היא העתקת הזהות מ R^2 לעצמו).

בהצלחה!