

80.134  
ב' / י"א

**בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)**  
מועד ב' תשס"ו

משך הבחינה: 3 שעות

שמות המורים: פרופ' א. מן  
פרופ' א. ריפס

**חלק א'**

ענו על שתיים מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 20 נקודות)

1. הוכיחו כי במרחב וקטורי סוף-מימדי, לכל שני בסיסים אותו מספר איברים.
2.  $T$  היא העתקה ליניארית ממרחב וקטורי סוף-מימדי  $V$  למרחב וקטורי  $U$ . הוכיחו  $\dim V = \dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T$ .
3.  $AX = B$  היא מערכת משוואות ליניאריות.  $A^* = (A:B)$  מתקבלת מ- $A$  ע"י סיפוח  $B$  כעמודה אחרונה. הוכיחו כי למערכת יש פתרון אם ורק אם  $\operatorname{rank} A^* = \operatorname{rank} A$  (ל- $A$  ול- $A^*$  אותה דרגה).

**חלק ב'**

ענו על שלוש מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 15 נקודות)

1. מטריצה ריבועית נקראת אלכסונית, אם כל האברים מחוץ לאלכסון הראשי הם 0. הראו, כי מטריצה ריבועית המתחלפת בכפל עם כל המטריצות האלכסוניות, היא עצמה אלכסונית.
2. במרחב החמשיות הממשיות  $\mathbb{R}^5$  נתונים שני תת-מרחבים  
 $U = \{(a, a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$   
 $W = \{(d, e, 2d, 2e, f) \mid d, e, f \in \mathbb{R}\}$   
מצאו בסיס ל- $U \cap W$ .
3. מהי דרגת המטריצה הבאה? האם התשובה תלויה בשדה הבסיס?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

4. מצאו שתי מטריצות מסדר  $2 \times 2$ ,  $A$  ו- $B$  כך ש  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ , ו- $AB = BA = 0$ .

5. עבור מספר מרוכב  $z = a + bi$  (ו- $a$  ו- $b$  ממשיים) מגדירים את הצמוד  $\bar{z}$  ע"י  
 $\bar{z} = a - bi$

תהי  $V$  קבוצת המספרים המרוכבים המקיימים  $\bar{z} = -z$ . הוכיחו, כי  $V$  היא תת-מרחב של  $\mathbb{C}$  מעל  $\mathbb{R}$ . מהו מימדו?

←

80. 134  
12/10/18

### חלק ג'

ענו ונמקו בקצרה על שלוש מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 5 נקודות).  
נכון או לא נכון?

1. מרחב וקטורי ממימד  $n$  מכיל תת-מרחב ממימד  $k$ , לכל  $0 \leq k \leq n$ .
2. במרחב וקטורי ממימד 3 החיתוך של שני תת-מרחבים ממימד 2 אינו 0.
3. רביעיית וקטורים, שכל שלושה מהם בלתי-תלויים, היא בלתי תלויה.
4.  $\mathbb{Z}_4$  (השלמים מודולו 4) הוא שדה.
5. למערכת של שלוש משוואות ליניאריות בארבעה נעלמים,  $AX = B$ , שבה דרגת  $A$  היא 3, יש פתרון.

**בהצלחה!**