

80. 134  
1/10/19

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)

מועד א' תשס"ו

משך הבחינה: 3 שעות

שמות המורים: פרופ' א. מן

פרופ' א. ריפס

חלק א'

ענו על שתיים מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 20 נקודות)

1. הוכיחו כי למרחב וקטורי נפרש סופית יש בסיס.
2. במרחב וקטורי סוף-מימדי  $V$  נתונים שני תת-מרחבים  $U$  ו- $W$ . הוכיחו:  
$$\dim U + \dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W)$$
3. נתונה מערכת משוואות ליניאריות  $AX = B$  ב- $n$  נעלמים. ידוע כי למערכת יש פתרון. הראו כי מימד ישריית הפתרונות הוא  $n - \text{rank} A$  (מספר הנעלמים פחות דרגת  $A$ ).

חלק ב'

ענו על שלוש מהשאלות הבאות (כל שאלה מעניקה עד 15 נקודות)

1. נתונה מטריצה ריבועית  $A$  המתחלפת בכפל עם כל המטריצות מאותו סדר. הראו כי  $A = cI$ , כאשר  $c$  הוא איבר בשדה הבסיס  $I$  היא מטריצת היחידה.

2. במרחב הרביעיות הממשיות  $\mathbb{R}^4$  נתונים שני תת-מרחבים

$$U = \{(a, 2a, b, 2a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{(c, d, 2c, 2d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

הראו כי  $U+W = \mathbb{R}^4$ .

3. נתונה המטריצה  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & 8 & 10 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$

הוכיחו, כי  $\text{rank} A = 2$ , אלא אם כן מצוין שדה הבסיס הוא 2. מהי הדרגה במקרה זה?

4. במרחב הרביעיות הממשיות  $\mathbb{R}^4$  נתונה ההעתקה הליניארית

$$T(a, b, c, d) = (a, 2b, 3c, 4d)$$

מצא את מטריצת  $T$  ביחס לבסיסים

$$u_1 = (1, 0, 0, 0), u_2 = (1, 1, 0, 0), u_3 = (1, 1, 1, 0), u_4 = (1, 1, 1, 1)$$

$$w_1 = (1, 1, 1, 1), w_2 = (0, 1, 1, 1), w_3 = (0, 0, 1, 1), w_4 = (0, 0, 0, 1) \quad \text{ו-}$$

5. במרחב הפולינומים הממשיים ממעלה  $n$  לכל היותר, נסמן  $Tf(x) = f(x+1) - f(x)$ .

הראו, כי  $T$  היא העתקה ליניארית, ומצאו את גרעינה ותמונתה.

←

80. 134  
16/10/16

### חלק ג'

האם הטענות הבאות נכונות? ענו על שלוש מהן ונמקו בקצרה (כל תשובה מעניקה עד 5 נקודות).

1. אם במערכת משוואות ליניאריות יש יותר נעלמים ממשוואות, למערכת יש פתרון.
2. אם בשדה  $F$  קיים איבר  $a \neq 0$ , כך ש-  $a+a+a=0$ , אז כל איבר  $b \in F$  מקיים  $b+b+b=0$ .
3. יש שתי מטריצות  $A$  ו-  $B$  מסדר  $2 \times 2$  כך ש-  $AB=0$  ו-  $BA \neq 0$ .
4.  $Q(\sqrt{2}) \cap Q(i) = Q$  (הוא שדה הרציונליים).
5. אם המטריצות הריבועיות  $A$  ו-  $B$  מאותו סדר הפיכות, גם המכפלה  $AB$  הפיכה וקיים  $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ .

בהצלחה!