

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)

הזמן: 3 שעות

מועד ב' תשס"ה

המורים: פרופ' אלכסנדר לובוצקי, פרופ' אליהו ריפס, מר שמואל ברגר

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 40, בחלק השני 40, ובחלק השלישי 21. ציון הבחינה המכסימלי הוא 100.

חלק I

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 1-3. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה. (20 נקודות לשאלה).

1. יהי V מרחב וקטורי סוף-מימדי מעל השדה F ויהיו U, W תתי-מרחבים וקטורים של V . הוכיחו כי

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

2. יהיו V, W מרחבים וקטורים מעל השדה F ויהי $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ בסיס בעל n איברים של V . הוכיחו כי לכל β_1, \dots, β_n , לאו דווקא שונים, ב- W , קיימת העתקה ליניארית אחת ויחידה $T: V \rightarrow W$ כך שלכל i ($i = 1, 2, \dots, n$) $T(\alpha_i) = \beta_i$.

3. נתונה מערכת משוואות $Ax = b$, כאשר $A \in M_{m \times n}(F)$, x וקטור ב- F^n ו- b וקטור ב- F^m . הוכיחו כי מרחב הפתרונות הוא או הקבוצה הריקה או ישירה שמימדה שווה למספר הנעלמים פחות דרגת המטריצה A .

חלק II

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 4-6. (20 נקודות לשאלה).

4. מטריצה ריבועית D ב- $M_{n \times n}(F)$ נקראת מטריצה אלכסונית אם לכל $i \neq j$ ($1 \leq i, j \leq n$) $D_{i,j} = 0$. נתונה מטריצה $A \in M_{n \times n}(F)$ המקיימת שלכל מטריצה אלכסונית $D \in M_{n \times n}(F)$, $AD = DA$. הוכיחו כי A מטריצה אלכסונית.

5. נתון המרחב הוקטורי F^3 כאשר $F = Z_5$ (השדה עם 5 איברים), ונתונות שתי קבוצות סדורות של וקטורים:

$$A = \{(1,2,3), (2,3,3), (3,2,0)\}$$

$$B = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$$

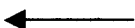
א. הוכיחו כי A, B הם בסיסים למרחב הוקטורי F^3 .

ב. מצאו את מטריצות המעבר בין הבסיסים, כלומר את $[id]_B^A$ ו- $[id]_A^B$.

6. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F . יהיו $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ קבוצה בלתי תלויה ליניארית של וקטורים ב- V ו- $B = \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$ קבוצה פורשת של וקטורים ב- V . הוכיחו

א. לכל $\alpha \in A$ יש $\beta \in B$ כך ש- $(A \setminus \{\alpha\}) \cup \{\beta\}$ קבוצה בלתי-תלויה ליניארית.

ב. לכל $\beta \in B$ יש $\alpha \in A$ כך ש- $(A \setminus \{\alpha\}) \cup \{\beta\}$ קבוצה בלתי-תלויה ליניארית.



80. 134
ס"ו / ח"ב

חלק III

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 7-10. לגבי כל-אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה. (7 נקודות לשאלה).

7. יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל השדה Z_2 (השדה עם 2 איברים) ותהי $T: V \rightarrow Z_2$ העתקה ליניארית שאינה העתקת האפס. אזי מחצית (כלומר: 2^{n-1}) מאברי V מועתקים ע"י T ל-0 ומחצית (כלומר: 2^{n-1}) מאברי V מועתקים ע"י T ל-1.
8. נתונה מערכת של m משוואות ליניאריות ב- n נעלמים ו- $n > m$ (הכוונה בסימן $>$ היא לגדול ממש), אזי יש למערכת יותר מפתרון אחד.
9. יהיו $A, B \in M_{n \times n}(F)$ מטריצות המקיימות $AB = BA = 0$, אזי $A = 0$ או $B = 0$.
10. לא קיים שדה F כך ש- $Q \subset F \subset R$, כאשר Q הוא שדה המספרים הרציונליים ו- R הוא שדה המספרים הממשיים (הכוונה בסימן \subset היא להכלה ממש).

בהצלחה!

