80. 134
ק''ס אי/ח

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)

הזמן: 3 שעות

מועד א' תשס"ה

המורים: פרופ' אלכסנדר לובוצקי, פרופ' אליהו ריפס, מר שמואל ברגר

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 40, בחלק השני 40, ובחלק השלישי 21. ציון הבחינה המכסימלי הוא 100.

חלק I

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 1-3. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה. (20 נקודות לשאלה).

1. יהיו V,W מרחבים וקטורים נוצרים סופית מעל השדה F. תהי $T:V\to W$ טרנספורמציה ליניארית. הוכיחו כי

$$\dim \operatorname{Im} T + \dim Ker T = \dim V$$

2. מטריצה ריבועית A ב-$M_{n\times n}(F)$ נקראת מטריצה מרכזית אם לכל $B\in M_{n\times n}(F)$ מתקיים $AB=BA$. מטריצה ריבועית A ב-$M_{n\times n}(F)$ נקראת מטריצה סקלרית אם $A=cI$ כאשר $c\in F$ ו-I מטריצת היחידה בגודל $n\times n$.

   תהי A ב-$M_{n\times n}(F)$ מטריצה מרכזית, הוכיחו כי A מטריצה סקלרית.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, יהיו U_1,U_2 תתי מרחבים של V ויהיו $\alpha,\beta\in V$ וקטורים. הוכיחו כי אם $\alpha+U_1=\beta+U_2$ אז $U_1=U_2$. האם מכך נובע גם ש-$\alpha=\beta$? נמקו.

חלק II

ענו על שתים מתוך שלוש השאלות 4-6. (20 נקודות לשאלה).

4. תהיינה A,B מטריצות ב-$M_{n\times n}(R)$. נניח שלכל c ב-R^n יש פתרון למערכת $(AB)x=c$. הוכיחו שלכל c ב-R^n יש פתרון למערכת $Ax=c$ ויש פתרון למערכת $Bx=c$ (R הוא שדה המספרים הממשיים).

5. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}\lambda & 3 & 4\\ 1 & 0 & 6\\ 4 & 3 & 5\end{pmatrix}\in M_{3\times3}(Z_7)$. לאילו ערכים של $\lambda\in Z_7$ המטריצה A הפיכה? נמקו. (Z_7 הוא השדה עם 7 איברים).

6. יהיו U,W תתי-המרחבים הבאים של R^4 (R הוא שדה המספרים הממשיים):

$$U=Sp\{(1,0,0,0),(2,0,2,0),(0,1,1,1)\}$$
$$V=Sp\{(2,0,1,0),(-1,1,0,1),(1,1,1,1)\}$$

   מצאו בסיסים לתתי-המרחבים $U,W,U+W$ ומצאו את המימד של $U\cap W$.

←

80. 134
ינ"סם / א'

<u>חלק III</u>

ענו על שלוש מתוך ארבע השאלות 7-10. לגבי כל-אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה. (7 נקודות לשאלה).

7. קיימת טרנספורמציה ליניארית $T: R^3 \to R^3$ שתמונתה שווה לגרעינה (R הוא שדה המספרים הממשיים).

8. יהי V מרחב וקטורי ממימד n ו- $0 \neq \alpha \in V$. אזי לכל $\beta \in V$ קיימת טרנספורמציה ליניארית $T: V \to V$ כך ש- $T(\alpha) = \beta$.

9. יהיו $A, B \in M_{n\times n}(F)$. אם $AB = 0$ אז גם $BA = 0$.

10. לא קיים שדה F כך ש- $R \subset F \subset C$, כאשר R הוא שדה המספרים הממשיים ו- C הוא שדה המספרים המרוכבים (הכוונה בסימן $\subset$ היא להכלה <u>ממש</u>).

בהצלחה!

☺