

80. 134
ג"ס 9/18



האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)
מועד א' תשס"ד

משך הבחינה: 3 שעות

המורים: פרופ' א. ריפס, פרופ' ע. שלו

חלק א': ענו על 2 מ-3 השאלות הבאות

1. א. הגדירו מציין של שדה.
ב. הוכיחו שמציין של שדה הוא 0 או מספר ראשוני.
ג. יהי F שדה ממציין 11, ויהי a איבר בשדה המקיים $60 \cdot a = 0$. הוכיחו ש- $a = 0$.
2. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F . נניח ש- v_1, \dots, v_n בסיס ל- V ויהיו $w_1, \dots, w_n \in W$. הראו שקיימת העתקה ליניארית יחידה $T: V \rightarrow W$ המקיימת $T(v_i) = w_i$ לכל $i = 1, \dots, n$.
3. יהיו A, B מטריצות $n \times n$ מעל שדה F . הוכיחו ש- $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$.
(כאשר דטרמיננטה של A היא $|A| = \det(A)$.)

חלק ב': ענו על 2 מ-3 השאלות הבאות:

4. יהי V מרחב וקטורי ונניח ש- v_1, \dots, v_n בסיס ל- V .
א. יהי U תת-מרחב של V . האם אפשר למצוא תת-קבוצה של $\{v_1, \dots, v_n\}$ המהווה בסיס ל- U ? (הוכיחו או תנו דוגמה נגדית מנומקת).
ב. נניח ש- W תת-מרחב של V ו- $\dim W = n$, האם $W = V$ (הוכיחו או תנו דוגמה נגדית מנומקת).
5. יהיו U_1, U_2, U_3 תתי-מרחבים של מרחב וקטורי V נוצר סופית. נגדיר
$$a = \dim(U_1 + U_2 + U_3)$$
$$b = \dim U_1 + \dim U_2 + \dim U_3 - \dim(U_1 \cap U_2) - \dim(U_1 \cap U_3) - \dim(U_2 \cap U_3) + \dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3)$$
תנו דוגמה בה $a = b$ ודוגמה בה $a \neq b$ (נמקו).
6. נתונה מערכת משוואות

$$x + y + z = c$$

$$x + 2y + 3z = 2c$$

$$x + 4y + 9z = 3c$$

א. בהנחה שהשדה הוא \mathbb{R} מצאו את ערכי c עבורם

1. למערכת אין פתרונות.

2. למערכת יש פתרון יחיד.

3. למערכת יש יותר מפתרון אחד.

ב. כנ"ל בהנחה שהשדה הוא \mathbb{Z}_2 (שדה עם 2 איברים).

בהצלחה!