80.134
תשס"ג / ב

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

<u>בחינה באלגברה לינארית (1) (80134)</u>

מועד ב׳ תשס״ג הזמן: 3 שעות

המורים: פרופ׳ צליל סלע, פרופ׳ אליהו ריפס.

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 35, בחלק השני 32, ובחלק השלישי 34. ציון הבחינה המכסימלי הוא 100.

<u>חלק I</u>

ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1-6. לגבי כל אחת מהטענות, קבעו האם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה.

1. יהי V מ״ו נוצר סופית מעל שדה F, ונניח כי dimV=n. אם W תת-מרחב של V, dimW=n-2, אזי קיים תת-מרחב U של V, dimU=n-1, ו: $W \subseteq U \subseteq V$.
2. יהי V מ״ו מעל שדה F. אם הוקטורים $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ תלויים ליניארית, אזי קיים וקטור $\underline{v}_i$ התלוי לינארית בוקטורים המופיעים אחריו ברשימה.
3. האם קיימת מטריצה 2x2 $\underline{P}$ עם מקדמים רציונליים, כך ש:
$$\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$$
4. תהיינה A,B מטריצות ריבועיות מעל שדה המספרים הרציונליים. אם AB=0, אזי BA=O.
5. תהי $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ ותהי B מטריצה עם מקדמים שלמים. אם AB=BA, אזי det (B) הוא ריבוע של מספר שלם.
6. יהיה F שדה ונניח כי קיימת מערכת משוואות מעל F שהיא בעלת מספר סופי של פתרונות, אך בעלת יותר מפתרון אחד. אזי המציין של השדה F איננו 0 $(char(F) \neq 0)$.

המשך מעבר לדף

ע

80.134
תשס"ב / מ /

חלק II

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7-9. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

7. יהיו V,W,U מ"ו מעל שדה F. יהי $\underline{v}_1,\dots,\underline{v}_n$ בסיס ל V, $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_m$ בסיס ל W, ו $\underline{u}_1,\dots,\underline{u}_r$ בסיס ל U. יהיו $T:V\to W$ ו: $S:W\to U$ העתקות ליניאריות.

א. הגדר את המטריצה המייצגת את ההעתקה T ביחס לבסיסים הנתונים של V ו-W.

ב. תהי A המטריצה המייצגת את T, B המטריצה המייצגת את S, ו C המטריצה המייצגת את $S\circ T$, ביחס לבסיסים הנתונים. אזי: BA=C.

8. נסחו והוכיחו את נוסחת פיתוח הדטרמיננט לפי שורה (נוסחת המינורים).

9. יהי V מ"ו מעל שדה F, ויהיו $\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n\in V$. נגדיר:

$$\{\underline{w}_{i_1},\dots,\underline{w}_{i_s}\}=\{\underline{w}_i \mid \underline{w}_i\neq\underline{0} \wedge \underline{w}_i\notin Span(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_{i-1}),\ 1\le i\le n\}$$

א. הוכיחו כי: $\underline{w}_{i_1},\dots,\underline{w}_{i_s}$ בת"ל.

ב. הוכיחו כי:

$$Span(\underline{w}_{i_1},\dots,\underline{w}_{i_s})=Span(\underline{w}_1,\dots,\underline{w}_n).$$

חלק III

ענו על שתים מהשאלות 10-12.

10. יהי n מספר טבעי, ותהי σ התמורה:

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ n & n-1 & & 2 & 1\end{pmatrix}$$

הוכיחו כי אם n=4k+2, התמורה σ אי-זוגית, ואם n=4k התמורה σ זוגית.

11. מטריצה A נקראת סימטרית אם $A=A^t$. תהי A מטריצה ריבועית. הוכיחו:

א. $A+A^t$ מטריצה סימטרית.

ב. $A\,A^t$ מטריצה סימטרית.

12. תהיינה A, B מטריצות סימטריות מסדר n n. אזי AB היא מטריצה סימטרית אם ורק אם AB=BA.

בהצלחה!