80. 134
ל"ט/א' תשס"ג

האוניברסיטה העברית בירושלים

החוג למתמטיקה

<u>בחינה באלגברה לינארית (1) (80134)</u>

מועד א' תשס"ג — הזמן: 3 שעות

המורים: פרופ' צליל סלע, פרופ' אליהו ריפס.

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 35, בחלק השני 32, ובחלק השלישי 34.
ציון הבחינה המכסימלי הוא 100.

<u>חלק I</u>

ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1-6. לגבי כל אחת מהטענות, קבעו האם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה.

1. יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה F, ו – T העתקה לינארית $T:V\to V$. אם $T^2=0$, אזי $\dim(\ker T) \geq \frac{1}{2}\dim(V)$.

2. יהי V מ"ו מעל שדה F. אם הוקטורים v_1, v_2, v_3 הם בת"ל, אזי הוקטורים:
$$v_1+4v_2-3v_3,\ v_1+2v_2-v_3,\ v_1+3v_2-2v_3$$
הם בת"ל.

3. יהי V מ"ו מעל שדה F, ותהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית. יהי v_1, v_2 בסיס ל- V, ונניח כי לפי בסיס זה T מיוצגת על-ידי המטריצה: $A_T=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.
אזי קיים בסיס ל – V, שביחס אליו T מיוצגת על-ידי המטריצה: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

4. יהי x מספר רציונלי ונניח כי $x\neq 2,3$. אזי למטריצה: $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ x & 4 \end{bmatrix}$
קיימת מטריצה הופכית.

5. לכל שתי מטריצות ריבועיות מעל שדה F:
$$\det(AB)-\det(A)-\det(B)+\det(A+B)=0$$

6. תהי $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$. אזי לכל מטריצה B מסדר 2x2 עם מקדמים רציונליים
$r(AB)=r(B)$ (הדרגה של המטריצה AB שווה לדרגה של המטריצה B).

80.134
תשס"ג /ג/

<u>חלק II</u>

ענו על שתיים מתוך שלוש השאלות 7-9. אין להסתמך על משפטים שקולים או משפטים הנובעים מהטענה שבשאלה.

7. יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה F, ויהי $W \subseteq V$ תת-מרחב. אזי W נוצר סופית ו: $\dim(W) \leq \dim(V)$.

8. תהי A מטריצה ריבועית מעל שדה F. אזי: $\det(A) = \det(A^t)$.

9. נסחו והוכיחו את נוסחת Cramer.

<u>חלק III</u>

ענו על שתיים מהשאלות 10-12.

10. תהי A המטריצה: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

מצאו שלוש מטריצות שונות B_1, B_2, B_3 עם מקדמים רציונליים, שעבורן:

$$B_1 A = B_2 A = B_3 A = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. יהיה F שדה. הוכיחו כי לכל $a, b, c \in F$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

12. מטריצה ריבועית A נקראת סימטרית אם $A=A^t$. הוכיחו כי אם A מטריצה סימטרית הופכית, אזי המטריצה ההופכית ל – A היא סימטרית.

בהצלחה!