

80. 134
נס'ס'ר/ר'ר

האוניברסיטה העברית בירושלים החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)

מועד ב' תשס"ב

הזמן: 3 שעות

המורים: פרופ' א. ריפס
פרופ' ה. פורסטברג

1. ענה על 6 שאלות בחלק זה. נמק תשובתך. תשובה לא מנומקת לא תיחשב.
כל שאלה 6 נקודות.

1. \mathbb{R} הוא שדה הממשיים, \mathbb{C} הוא שדה המרוכבים, חשב $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^{10}$.

2. נתונה מערכת עם 4 איברים $\{0,1,2,3\}$ וחוקי חבור וכפל כדלהלן:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

האם המערכת היא שדה?

3. נכון או לא נכון: אם $sp\{u_1, u_2, \dots, u_n\} = V$ אזי קיים בסיס $\{v_1, v_2, \dots\}$ ל- V כאשר כל v_i נלקח מתוך $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

4. נתון שהוקטורים $\{x, y, z\}$ בלתי תלויים ונתון שהוקטורים $\{u, v, z\}$ בלתי תלויים. מה ניתן לומר על $\dim sp\{x, y, z, u, v\}$?

5. נכון או לא נכון: אם A, B, C מטריצות ריבועיות ואם $AB = I$ וגם $CA = I$ אזי $B = C$.

6. נכון או לא נכון: אם A מטריצה $n \times n$ ואם קיים $u \in \mathbb{R}^n$ עם $Au = 0$ אזי $\det A = 0$.

המשך מעבר לדף ←

80. 134
ר' א' א' א' א'

7. האם ייתכן המצב הבא לגבי מערכות משוואות עם מקדמים ממטריצה נתונה $A = (a_{ij})$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad \text{למערכת}$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

יש לכל היותר פתרון אחד

ואילו למערכת

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

.....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

יש יותר מפתרון אחד.

8. נתון ש- V מרחב וקטורי ממימד n , $U, W \subset V$ שני תתי מרחבים ממימדים r, s . מה

התנאי על r, s, n שיבטיח קיום וקטור $v \neq 0$ עם $v \in U$ וגם $v \in W$?

II. ענה על השאלה הראשונה (12 נקודות) ועוד שתי שאלות בחלק זה (20 נקודות).

1. א. מצא פולינום $P(t) = at^2 + bt + c$ כך ש

$$P(2) = -5, P(3) = 3, P(5) = -3.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 1 & 2 \\ 4 & 12 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ב. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה}$$

2. נתונות העתקות ליניאריות $f: U \rightarrow V$ ו- $g: V \rightarrow U$ בין שני מרחבים וקטוריים. ל- U

יש בסיס $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. לפי הבסיסים האלה ההעתקה f מתאימה למטריצה F ואילו

g מתאימה למטריצה G . נתון שההרכבה fg הינה העתקת הזהות על V .

$$I_m = FG \quad \text{הוכח ש-}$$

המשך בדף הבא ←

80. 134
תשובות / פת'ים

3. V מרחב וקטורי ממימד n , U, W שני תתי מרחבים עם $\dim U = \dim W = n-1$.

א. הראה שתמיד מתקיים $\dim(U \cap W) \geq n-2$.

ב. באיזה תנאי ייתכן אי-שוויון ב- (א)? נמק תשובתך.

4. תהיינה A, B מטריצות כך שהמכפלה AB מוגדרת.

א. אם $(b_{*1}, b_{*2}, \dots, b_{*n}) = B$ כאשר b_{*i} הן עמודות, מהן העמודות של AB ?

ב. הראה ש $\text{rank } AB \leq \text{rank } B$.

III. ענה על שתי שאלות בחלק זה. (כל שאלה 16 נקודות)

1. הוכח שאם $W \subset V$ שני מרחבים וקטוריים ואם (w_1, \dots, w_m) הוא בסיס ל W , ואם

$\dim V < \infty$ אזי ניתן להוסיף וקטורים ל (w_1, \dots, w_m) ליצור בסיס של V .

2. יהא V מרחב וקטורי הנפרש על ידי n וקטורים, ויהיו u_1, u_2, \dots, u_{n+1} וקטורים ב- V .

הוכיחו שהוקטורים (u_1, \dots, u_{n+1}) תלויים ליניארית.

3. תהא A מטריצה $m \times n$. הגדר את הדרגה של A לפי שורות ודרגה של A לפי עמודות והראה ששני המספרים שווים.

בהצלחה!