

80. 134
ת"ס"ג"א

האוניברסיטה העברית בירושלים החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה ליניארית (1) (80134)

מועד א' תשס"ב

הזמן: 3 שעות

המורים: פרופ' א. ריפס

פרופ' ה. פורסטנברג

I. ענה על 6 שאלות בחלק זה. נמק תשובתך, תשובה לא מנומקת לא תיחשב.

כל שאלה 6 נקודות.

1. נתון ש- F שדה ו- a הוא איבר של F . האם מהטענה $0 = a + a + a + a + a + a$ ניתן

להסיק שאחד מהשוויונות $0 = a + a$, $0 = a + a + a$ מתקיים?

2. יהא $\mathbf{R} = \text{שדה הממשיים}$, $\mathbf{C} = \text{שדה המרוכבים}$. האם השוויון הבא הוא נכון:

$$? \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{R} + \dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = \dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$$

3. נכון או לא נכון: אם A, B מטריצות לא ריבועיות כך שגם AB וגם BA מוגדרות, אזי

אם המכפלה האחת שווה למטריצת היחידה גם המכפלה השניה שווה למטריצת היחידה.

4. מצא שתי מטריצות A, B כך ש- $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $BA = (1)$, האם יש עוד זוג A, B ?

5. נכון או לא נכון: אם V מרחב וקטורי ואם $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס ל- V ואם $V \supset W$ הוא

תת-מרחב, אזי ניתן לבחור תת-קבוצה של $\{u_1, \dots, u_n\}$ שיהווה בסיס ל- W .

6. אם $\{u_1, \dots, u_n\}$ הם וקטורים במרחב וקטורי V ואם הם אינם פורשים את V אזי בהכרח

אחד הוקטורים הוא צירוף ליניארי של האחרים. נכון או לא נכון?

7. נתבונן בשתי מערכות משוואות עם אותם מקדמים:

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1'$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = c_2'$$

$$a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = c_m'$$

$$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = c_m$$

נכון או לא נכון: אם לאחת המערכות יש בדיוק פתרון אחד, אזי למערכת השניה יש

לכל היותר פתרון אחד.

8. נכון או לא נכון: לכל שתי מטריצות ריבועיות:

$$\det(A + B) = \det A + \det B$$

המשך מעבר לדף ←

80. 134
 (כ"ק"ר"א)

II. ענה על השאלה הראשונה (12 נקודות) ועוד שתי שאלות בחלק זה (20 נקודות).

1. א. פתור את המערכת

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x + 3y + 9z &= 20 \\ x - 4y + 16z &= 30 \end{aligned}$$

ב. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. נתונות העתקות ליניאריות $f: U \rightarrow V$, $g: V \rightarrow U$ ונתון שההרכבה $gf: U \rightarrow U$

היא העתקת הזהות על U . הוכח ש- $\dim V \geq \dim U$.

3. הראה שאם V נפרש על ידי מספר סופי של וקטורים ואם $W \subset V$ הוא תת-מרחב אזי

גם W נפרש על ידי מספר סופי של וקטורים. (אין להסתמך כאן על מושג המימד).

4. נתונה מערכת משוואות

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n$$

ונתון שהפתרון המלא למערכת הוא

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t+2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ nt+n \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$$

מה ניתן לומר על

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

rank ? נמק.

המשך בעמוד הבא ←

80. 134
תוס' 2/א'

III. ענה על שתי שאלות בחלק זה. (כל שאלה 16 נקודות)

1. א. אתהא $f: U \rightarrow V$ העתקה ליניארית. הגדר $\ker f$, $\text{im } f$.

ב. הוכח

$$\dim(\ker f) + \dim(\text{im } f) = \dim U$$

2. הוכח שמטריצה A הפיכה אם ורק אם $\det A \neq 0$.

3. הוכח שלמערכת משוואות

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0$$

עם $n = m + 1$ קיים פתרון (x_1, x_2, \dots, x_n) שונה מוקטור האפס.

בהצלחה!