80.134
תשס"ב / א'

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה באלגברה לינארית (1) (80134)

מועד א' תשס"א הזמן: 3 שעות
המורים: פרופ' צליל סלע, פרופ' אליהו ריפס, ד"ר יהודה שלום

במבחן שלושה חלקים. סך הנקודות בחלק הראשון 35, בחלק השני 36, ובחלק השלישי 30. ציון הבחינה המקסימלי הוא 100.

חלק I. ענו על 5 מתוך 6 השאלות 1-6. לגבי כ"א מהטענות קבעו אם היא נכונה או שקרית, ונמקו בקצרה.

1. יהיו V,W מ"ו מעל שדה F, נוצרים סופית וממימד $1<$. תהי $T:V\to W$ ט"ל שהיא על W. אם $\dim_F Hom(V,W)=10$ אזי $\dim(KerT)=3$.

2. קיימת מערכת משוואות לינאריות מעל שדה הרציונאלים Q שלה בדיוק 3 פתרונות.

3. אם F שדה ו $A,B\in M_2(F)$ כך ש- $AB=0$, אז $BA=0$.

4. נניח שעבור $0\neq a\in F$ המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ מקיימת $A^2=I$ כאשר $I\in M_2(F)$ היא מטריצת היחידה. אזי המציין של F הוא 2.

5. יהיו V,W,U מ"ו נוצרים סופית מעל F ותהיינה $f:V\to W$ $g:W\to U$ ט"ל. יהיו $\{v_1,\dots,v_m\}$, $\{w_1,\dots w_n\}$, $\{u_1,\dots,u_\ell\}$ בסיסים ל- V,W,U בהתאמה, ונניח שלפי בסיסים אלו המטריצה המתאימה ל- f היא A ול- g היא B. אם $\operatorname{Im}(f)\subseteq Ker(g)$ אז $BA=0$.

6. לכל מ"ו V מעל שדה F בעל מימד 16 קיים תת מרחב $W\subseteq V$ בעל מימד 7.

80. 134
תשס"ו/ א'

חלק II . ענו על שתי השאלות הבאות. אין להסתמך על משפטים השקולים או שנובעים מהטענה שבשאלה.

7. יהיו V,W מ"ו מעל F, $\{v_1,\dots,v_n\}\subseteq V$ בסיס, ו- $\{w_1,\dots,w_n\}\subseteq W$ סדרה כלשהיא.
הראו שקיימת ט"ל יחידה $T:V\to W$ המקיימת $T(v_i)=w_i$ לכל $1\le i<n$.

8. הוכיחו שאם V מ"ו מעל F הנפרש (נוצר) ע"י k וקטורים $v_1,\dots v_k$, אזי <u>כל</u> $k+1$ וקטורים ב- V הינם תלויים לינארית.

חלק III. ענו על השאלות הבאות

9. מצא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת הבאה מעל שדה הממשיים **R**

$$\begin{aligned}5x+10y+15z&=0\\-2x+y+z&=0\\3x+21y+30z&=0\end{aligned}$$

הסבר את פעולותיך.

10. תהי $T:\mathbf{R}^{(2)}\to\mathbf{R}^{(2)}$ הטרנספורמציה המוגדרת ע"י $T(x,y)=(2x-y,\ x+y)$

א. (6 נק') חשב את ההרכבה $T^2=T\circ T$

ב. (6 נק') עבור הבסיסים $\{(1,1),(2,0)\}$ בתחום ו- $\{(1,0),(0,1)\}$ בטווח (נתונים בסדר משמאל לימין) חשבו את המטריצה A המתאימה ל- T^2.

ג. (3 נק') נסמן את המטריצה המתאימה ל- T ביחס לבסיסים הנ"ל ב- B . הסבר מדוע קיום אי שוויון $A\ne B^2$ אינו עומד בסתירה למשפט שהוכח בנוגע לקשר בין מכפלת מטריצות והרכבת טרנספורמציות.

בהצלחה!!