

80134

99/00

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתימטיקה

(19)

בחינה באלגברה לינארית (1)
סמסטר הסתיו - תש"ס - מועד א' (80134)

המורים: פרופ' עזריאל לוי, ד"ר יורם לסט, פרופ' מיכאל משלר הזמן: שלוש שעות

ענה על 3 שאלות בלבד מתוך 5 השאלות הבאות. אם ייענו יותר שאלות אז תיבדקנה שלוש התשובות הראשונות בלבד.

תשובותיך על השאלות צריכות לכלול הוכחות מלאות וברורות, אלא אם נאמר במפורש שאין צורך להוכיח. מותר להסתמך על משפטים קודמים מבלי להוכיחם, אך עליהם להיות מנוסחים באופן מלא.

מן הציון של כל שאלה ניתנים 20% לחלק א', 45% לחלק ב' ו-35% לחלק ג'.

1. א. נסח את אקסיומות השדה.

ב. הוכח כי אם בשדה $a \cdot b = 0$ אז $a = 0$ או $b = 0$.ג. פתור את המשוואה הבאה ב- Z_{11} .

$$\frac{7(x-5)}{3} + 4 = \frac{5(x-4)}{4}$$

2. א. הגדר את המושג "בסיס של מרחב וקטורי V ".

ב. הוכח כי לכל שני בסיסים של מרחב וקטורי יש אותו מספר איברים. התחל את ההוכחה מבלי להניח שום משפט על מספרי האיברים של סדרות וקטורים. אם ההוכחה שלך כוללת יותר מצעד אחד, סקור את כל הצעדים והוכח בפרוטרוט צעד אחד מהם שאינו הצעד הפשוט.

ג. מצא בסיסים למרחב הנפרש ע"י השורות של המטריצה A ולמרחב הנפרש ע"י העמודים של המטריצה A , היכן ש-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

בכל אחת משתי תשובות אלו צטט את המשפט האומר שסידרת הווקטורים שחישבת היא באמת הבסיס הדרוש.

3. א. הגדר את המושג "סידרת הווקטורים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ היא בלתי תלויה לינארית".ב. נתונה סידרת ווקטורים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ אשר בה אף וקטור אינו צרוף לינארי של קודמיו בסידרה (וזו כולל את ההנחה ש- $\alpha_1 \neq 0$). הוכח כי סידרה זאת בלתי תלויה לינארית.ג. יהי V מרחב ווקטורי מעל שדה F , ו- α, β, γ סידרת ווקטורים בלתי תלויה ב- V .

- 80134 99/00
- (i) הוכח כי אם המציין של F אינו 2 גם הסידרה $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ היא בלתי תלויה לינארית.
(ii) הוכח כי אם המציין של F הוא 2 הסידרה הנ"ל תלויה לינארית.

4. א. הגדר את המושגים:

(i) מערכת משוואות לינאריות הומוגניות.

(ii) ישרייה.

ב. הוכח שאם קבוצת הפיתרונות של מערכת המשוואות הבאה, אשר מקדמיה לקוחים משדה F כלשהו, אינה ריקה אז היא מהווה ישרייה.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ג. רשום מערכות משוואות א-ג של שלוש משוואות בשני משתנים כך ש-א. למערכת אין פיתרון, ב. למערכת יש בדיוק פיתרון אחד, ו-ג. למערכת יש אינסוף פיתרונות. נמק את תשובותיך.

5. א. הגדר את המושג דרגת השורות של מטריצה.

ב. הוכח שלמערכת משוואות לינאריות אי-הומוגנית יש פיתרון אם ורק אם דרגת המטריצה המצומצמת שלה (מטריצת המקדמים הקשורים למשתנים) שווה לדרגת המטריצה המורחבת שלה (מטריצת כל המקדמים).

ג. הוכח כי דרגת השורות של המטריצה המורחבת שווה לדרגת השורות של המטריצה המצומצמת או גדולה ממנה בדיוק ב-1.

בהצלחה!