

זמן הבחינה: שעתיים.
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. תהי $S: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ מגדרת ע"י

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + x_2, 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 4x_4, 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4)$$
 ותהי $S = \{T \in \text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) \mid TS = 0\}$
 א. מצא בסיס עבור $\ker S$.
 ב. הוכח כי S היא תת-מרחב של $\text{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$.
 ג. מצא $\dim S$.

2. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , יהי B בסיס עבור V ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית, ויהי $f(x) \in F[x]$. הוכח כי $f(T)g = f([T]_B)g$.

3. נתון כי המכפלה $\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(a)g(a)$ היא מכפלה פנימית על $R_1[x]$ ושהפונקציה $b = 3a + 4$ לכל $\lambda(a + bx) \in R_1[x]$ היא פונקציונל ליניארי. מצא $p_0(x) \in R_1[x]$ המקיימת $(f(x), p_0(x)) = (f(x), p_0(x))$ לכל $\lambda \in R_1[x]$.
4. יהי V מרחב וקטורי ממומד סופי, עם מכפלה פנימית, ויהי U תת-מרחב של V . הוכח כי $U^\perp = (U^\perp)^\perp$.

5. יהיו $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. מצא מטריצה רגולרית C כך ש- $B = C^{-1}AC$.
6. יהי V מרחב וקטורי מעל C עם מכפלה פנימית, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. הוכח כי אם $\dim(Tv, v) = 0$ לכל $v \in V$ אזי $T = 0$.

בהצלחה!

זמן הבחינה: שעתיים.
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממומד סופי מעל שדה F , יהיו B, C בסיסים עבור V, W . בהתאמה, ותהי $W \rightarrow V: T$ העתקה ליניארית.
 א. הוכח כי $v \in \ker T$ אם ורק אם $[v]_B$ הוא פתרון של מערכת המשוואות $[T]_B^C \bar{x} = \bar{0}$.
 ב. הוכח כי $\dim(\ker T) = \dim([T]_B^C)$.

2. יהי $\alpha \in (\mathbb{R}^4)^*$ מגדר ע"י $\alpha(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4$ לכל $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. מצא בסיס אורתונורמלי עבור $\ker \alpha$.
 ב. השלם את הבסיס שמצאת בחלק א' לבסיס אורתונורמלי עבור \mathbb{R}^4 .

3. יהי V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית.
 א. יהי U תת-מרחב של V . הוכח כי $U^\perp = (U^\perp)^\perp$.
 ב. תהי $S \subseteq V$, הוכח כי $\text{Sp}(S)^\perp = (S^\perp)^\perp$.
 ג. יהיו $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. חשב $A^6 B^{2517}$.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 4 & 5 & 8 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$. מצא את הפולינום המינימלי של A ובעזרתו מצא את A^{-1} .
6. תהי $W \rightarrow V: T$ העתקה ליניארית רגולרית.
 א. הוכח כי $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.
 ב. הוכח כי אם T היא גם נורמלית, אזי T^{-1} היא נורמלית.

בהצלחה!