

מבחן אלגברה ליניארית תשע"ז סמי'א' מועד ב' פייגלסטוק

זמן הבחינה: שעתיים
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

- 1. א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + 4i = 0$ ב- C.
- ב. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^2 = 3 - 2i + x - 1 - z$ ב- Z_5 .

2. א. רשום את כל הבסיסים של Z_2^2 .

ב. יהי V מרחב וקטורי מעל Z_2 ויהי U תת-מרחב של V עם $\dim U = 2$. מצא כמה בסיסים שונים יש ל-U, והוכח את תשובתך.

3. א. יהי V מרחב וקטורי, $\dim V = 4$, ויהיו W, U תת-מרחבים של V כך ש-
 $\dim W = 2$, $\dim U = 1$, $W \subseteq U$. הוכח כי $V = W + U$, אבל $W + U$ איננו סכום ישר.

ב. יהיו $U = \text{Sp}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$, $W = \text{Sp}((1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1))$,
 $U = \text{Sp}((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 0, 0))$. מצא בסיס עבור U.

4. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + (a-1)x_3 = -8 \\ 2x_1 + (a-1)x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + ax_3 = -6 \end{cases}$$

מצא עבור אילו ערכים של a יש למערכת פתרון יחיד, ב. אין למערכת פתרון, ג. יש למערכת יותר מפתרון אחד. במקרה ג. מצא את הפתרון הכללי.

5. א. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$. מצא A^{-1} .

ב. בעזרת תשובתך לחלק א. פתור את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases}$$

6. תהי A מטריצה חגה, הוכח כי $|A| = |A|$.

בהצלחה!

מבחן אלגברה ליניארית 2 תשע"ז מועד א' פייגלסטוק

זמן הבחינה: שעתיים.
ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

- 1. יהיו $v_1, v_2 \in R^4$ בלתי תלויים ליניארית, ותהי $T^2 = 0$ ו $T \in \text{Hom}(R^4, R^4)$ ו $v_1, v_2 \in \ker T$.

א. הוכח כי S היא תת-מרחב של $\text{Hom}(R^4, R^4)$.

ב. מצא $\dim S$ (הסבר את תשובתך).

2. יהי $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס עבור מרחב וקטורי V, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית. הוכח כי T רגולרית אם ורק אם $[T]_B$ היא רגולרית.

ב. תהי T רגולרית. הוכח כי $[T]_B^{-1} = [T]_B^{-1}$ לכל B טבעי.

3. נתון כי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס עבור $R[x]$ ו $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס עבור B^* הוא הבסיס הדואלי של B. מצא את λ, μ ואת γ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. יהי $(1, 2, -2, 1) \in R^4$. מצא בסיס אורתונורמלי עבור \perp ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5. א. מצא עבור אילו ערכים של a המטריצה A היא לכסית.

ב. עבור $a = 2$ מצא מטריצה P כך ש- $P^{-1}AP$ היא אלכסונית.

6. יהי V מרחב וקטורי מעל C עם מכפלה פנימית, ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה ליניארית המקיימת $\langle Tv, w \rangle = \langle v, Tw \rangle$ לכל $v, w \in V$. הוכח כי T היא נורמלית.

ב. תהי $T: R^3 \rightarrow R^3$ מגדרת על ידי $T(x, y, z) = (2x + 3y, x - y + z, x + 2y - 4z)$ לכל $(x, y, z) \in R^3$. מצא את T^* .

בהצלחה!