89

מבחן אלגברה לינארית סמ' ב מועד ב תשנ"ג פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר

I. יהי V מרחב וקטורי, $\dim V = n < \infty$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. הוכח כי קיים תת-מרחב W של V כך ש: $V = \ker T \oplus W$.

II. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית רגולרית, ויהי λ ערך עצמי של T. הוכח:

א) $\lambda \neq 0$.

ב) לכל מספר שלם n (חיובי, 0, או שלילי) λ^n הוא ערך עצמי של T^n.

III. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ עם מכפלה פנימית. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $\|v\| \leq \|Tv\|$ לכל וקטור $v \in V$. יהי λ ערך עצמי של T. הוכח כי $|\lambda| \geq 1$.

IV. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. מצא מטריצה אורתוגונלית P כך ש- $P^{-1}AP$ היא אלכסונית.

V. תהי $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ מוגדרת ע"י

$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1+x_2+x_3+x_4, x_2+x_3-x_4, x_2, x_3-x_4)$.

מצא בסיס אורתונורמלי עבור $\operatorname{im} T$.

VI. יהיו $A, B \in M_n(F)$ מטריצות דומות, ויהי $f(x) \in F[x]$.

א) הוכח כי $f(A)$ ו- $f(B)$ דומות.

ב) הוכח כי ל- A ול- B יש אותו פולינום מינימלי.

בהצלחה!

---

90 תק"מ

מבחן אלגברה לינארית 2 סמ' ב' מועד א' תשנ"ז פייגלשטוק

זמן הבחינה: שעתיים

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

1. תהי $S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מגדרת ע"י $S(x,y) = (2x+y, x-2y)$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. תהי $\mathcal{S} = \{T \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \mid TS = ST\}$.

א. הוכח כי $\mathcal{S}$ היא תת-מרחב של $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$.

ב. מצא בסיס עבור $\mathcal{S}$.

2. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהי $\phi \in V^*$. יהי $v \in V$ כך ש- $\phi(v) \neq 0$. הוכח כי $V = \mathrm{Sp}(v) \oplus \ker \phi$.

3. הוכח אי שוויון קושי-שורץ.

4. מכפלה פנימית על $\mathbb{R}_1[x]$ מגדרת ע"י $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ לכל $f(x), g(x) \in \mathbb{R}_1[x]$. נתון הבסיס $B = \{v_1 = 2, v_2 = x\}$ עבור $\mathbb{R}_1[x]$. בעזרת תהליך גרם-שמידט, מצא בסיס אורתונורמלי $B = \{v_1', v_2'\}$ עבור $\mathbb{R}_1[x]$ כך ש- $\mathrm{Sp}(v_1) = \mathrm{Sp}(v_1')$.

5. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & -36 & 18 \\ 0 & -11 & 6 \\ 0 & -11 & 16 \end{pmatrix}$. מצא מטריצה B כך ש- $B^2 = A$.

6. תהי $T: V \to V$ העתקה נורמלית, ויהי $v \in V$ כך ש- $Tv \neq \bar{0}$. הוכח כי $T^*v \neq \bar{0}$.

בהצלחה!