מבחן באלגברה לינארית תשנ"ב סמ' ב' מועד א' פיזיקה

זמן הבחינה: שעתיים.

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר. 87

I. יהי $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\ z&\bar z&z^{-1}\\ z^2&\bar z^2&z^{-2}\end{pmatrix}$ כאשר z הוא מס' מרוכב.

א) מצא עבור אילו ערכים של z המטריצה A היא הפיכה.

ב) מצא A^{-1} כאשר $z=2i$.

II. מצא עבור אילו ערכים של a המערכת הבאה הנ"ל:
א) יש פתרון יחיד, ב) בלי פתרון, ג) עם יותר מפתרון אחד. במקרה ג) מצא את הפתרון הכללי.

$$\begin{cases}2x_1+2x_2+ax_3=1\\ x_1+ax_2+2x_3=2\\ x_1+x_2+(a-1)x_3=0\end{cases}$$

III. יהי השדה $F=\{0,1\}$.

א) יהיו $v_1\neq\vec 0,\ v_2\neq\vec 0$ שני וקטורים ב F^n. הוכח כי v_1,v_2 הם תלויים לינארית אם ורק אם $v_1=v_2$.

ב) מצא כמה תת-מרחבים ממימד 1 יש ל F^n.

IV. תהי $A=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ ויהי $V=\{B\in M_2(\mathbb{R})\mid AB=BA\}$

א. הוכח כי V הוא תת-מרחב של $M_2(\mathbb{R})$.

ב. מצא בסיס עבור V.

V. יהיו v_1,v_2 שני וקטורים בלתי תלויים לינארית ב $\mathbb{R}^3$. יהי

$V_1=\{v\in\mathbb{R}^3\mid v_1\cdot v=0\}$, $V_2=\{v\in\mathbb{R}^3\mid v_2\cdot v=0\}$

הוכח כי $\mathbb{R}^3=V_1+V_2$ אבל $\mathbb{R}^3\neq V_1\oplus V_2$

VI. יהי F שדה, ויהי $G=\{A\in M_n(F)\mid |A|\neq 0\}$

הוכח כי G עם הפעולה כפל מטריצות היא חבורה.

בהצלחה!

60

ענה על 4 מתוך 6 שאלות ולא יותר.

I. תהי $P=\{z_1,z_2,\dots,z_n\}$ אוסף כל הפתרונות של המשוואה $x^n=1$ ב $\mathbb{C}$.

א) הוכח כי קיים $z\in\mathbb{C}$ כך ש $P=\{z,z^2,\dots,z^n\}$

ב) הוכח כי $z_1+z_2+\dots+z_n=0$.

II. עבור אילו ערכים של a: א) יש פתרון יחיד, ב) אין פתרון, ג) יש אינסוף פתרונות. עבור המערכת הבאה? במקרה ג) מצא את הפתרון הכללי.

$$\begin{aligned}(4a-4)x_1+(a+1)x_2+2ax_3&=3\\(2a-2)x_1+(a+1)x_2+ax_3&=2\\(3a-3)x_1+(a+1)x_2+ax_3&=3\end{aligned}$$

III. א) יהי $F=\{0,1\}$. רשום את כל הבסיסים עבור F^2.

ב) עבור אילו ערכים של a יהיו הוקטורים הבאים ב $\mathbb{R}^3$ בלתי תלויים לינארית?

$v_1=(1,2,a)$, $v_2=(2a+1,2,3)$, $v_3=(2,4,a-1)$.

IV. תהי B מטריצה קבועה ב $M_2(\mathbb{R})$, ותהי $V_B=\{A\in M_2(\mathbb{R})\mid AB=BA\}$.

א) הוכח כי V_B הוא תת-מרחב של $M_2(\mathbb{R})$.

ב) תהי $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$ ותהי $C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. מצא בסיס עבור V_B, V_C, $V_B\cap V_C$ ו V_B+V_C.

V. א) יהיו $A,B\in M_n(F)$ ותהי A רגולרית. הוכח כי למערכות $B\vec x=\vec 0$ ו $AB\vec x=\vec 0$ יש אותו מרחב פתרונות.

ב) חשב A^{-1} בשתי דרכים שונות כאשר $A=\begin{pmatrix}3&2&6\\1&1&2\\2&2&5\end{pmatrix}$

VI. יהיו $a_1,a_2,\dots,a_n$ מספרים ממשיים שונים ויהיו $b_1,b_2,\dots,b_n$ מספרים ממשיים כלשהם. הוכח כי קיים פתרון יחיד למערכת הבאה, ומצא אותו.

$$\begin{aligned}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3+\dots+a_1^{n-1}x_n&=b_1\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3+\dots+a_2^{n-1}x_n&=b_2\\&\ \vdots\\x_1+a_nx_2+a_n^2x_3+\dots+a_n^{n-1}x_n&=b_n\end{aligned}$$

1