אלגברה לינארית, מבחן מועד ב' ② פינקוס

88-110 - מס' קורס זמן הבחינה: שעתיים

85

שאלה א'

ענה על 2 מתוך 3 שאלות ולא יותר

1. א) מצא את כל הפתרונות של המשוואה $x^3=-8$ ב-$\mathbb{C}$.

ב) יהיו $\{z_1,\dots,z_m\}$ כל הפתרונות של המשוואה $x^m=1$ ב-$\mathbb{C}$. הוכח כי

$$z_1 z_2\cdots z_m=\begin{cases}1, & \text{m אי-זוגי}\\ -1, & \text{m זוגי}\end{cases}$$

2. יהי P_1 מרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{cases}x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ 3x_1-2x_2-3x_3=0\end{cases}$$

ויהי P_2 מרחב הפתרונות של המערכת

$$\begin{cases}2x_1-x_2-2x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2-2x_3=0\end{cases}$$

מעל $\mathbb{R}$. מצא בסיס עבור $P_1\cap P_2$ ועבור P_1+P_2.

3. תהי $A=\begin{pmatrix}1&6&7\\4&3&4\\2&3&9\end{pmatrix}$. מצא $adjA$. בעזרת $adjA$ חשב $|A|$ ו-A^{-1}. בעזרת A^{-1} פתור את המערכת

$$\begin{aligned}x_1+6x_2+7x_3&=101\\4x_1+3x_2+4x_3&=101\\2x_1+3x_2+9x_3&=101\end{aligned}$$

שאלה ב'

ענה על 2 מתוך 3 שאלות ולא יותר

1) א) תהי $A\in M_n(F)$. הוכח כי A הפיכה $\Leftrightarrow$ 0 אינו ערך עצמי של A.

ב) תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix}$. מצא את הפולינום האופייני ואת הפולינום המינימלי של A. בעזרת הפולינום האופייני של A חשב את A^{-1}.

2) א) מצא העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $T[(1,1,1)]=(0,0,0)$, $T[(0,1,1)]=(0,0,1)$ ו-$T[(0,0,1)]=(0,1,1)$.

ב) מצא תת-מרחב X של $Hom(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ כך ש-$X\neq\{0\}$ ו-[illegible] לכל $S\in X$, T [illegible] $(S+T)$ כאשר T היא ההעתקה של חלק א).

3) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$, $\dim V<\infty$, ותהי $T:V\to V$ העתקה נורמלית. הוכח כי T [illegible]

פינקוס 84

זמן הבחינה: שעתיים

ענה על 3 מתוך 4 שאלות ולא יותר

1) יהיו $v_1=(2+3i,2-3i)$, $v_2=(4-i,-3+2i)$, $v=(5,-3+6i)$ וקטורים ב-$\mathbb{C}^2$. האם v הוא צירוף לינארי של v_1 ו-v_2? אם כן, מצא סקלרים c_1,c_2 כך ש-$v=c_1v_1+c_2v_2$.

2) יהי $V=R_2[x]$ מרחב כל הפולינומים ממעלה ≤ 2 (עם מקדמים ממשיים). יהי $a\in\mathbb{R}$ ויהי $V_a=\{p(x)\in V \mid p(a)=0\}$.

א) הוכח כי V_a הוא תת-מרחב של V עם בסיס $\{(x-a),(x-a)^2\}$.

ב) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\neq b$. הוכח כי $V=V_a+V_b$.

ג) עבור $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\neq b$ מצא המימד ובסיס עבור $V_a\cap V_b$.

3) נתונה מערכת משוואות

$$\begin{aligned}x_1+x_2+(a+3)x_3&=1\\x_1+(a+1)x_2+(a+3)x_3&=a-29\\(a+1)x_1+(a+2)x_2+(a+3)x_3&=a^2\end{aligned}$$

עבור אילו ערכים של a:

א) קיים פתרון יחיד.

ב) אין פתרון.

ג) יש אינסוף פתרונות.

במקרה ג) מצא את הפתרון הכללי.

4) א) יהיו A,B מטריצות מאותו סדר עם רכיבים מתוך שדה F. הוכח כי אם עמודי B תלויים לינארית אזי שורות AB תלויות לינארית.

ב) חשב $\begin{vmatrix}1&a&a^2\\1&b&b^2\\1&c&c^2\end{vmatrix}$. מה התנאי על a,b,c כך שהמטריצה תהיה הפיכה?

בהצלחה!