12. V מרחב וקטורי בעל ממד סופי, $T \in Hom(V,V)$ הפיך. אז הפסוק „יש בסיסים α,β של V כך שהמטריצה $[T]_{\alpha,\beta}$ היא מטריצת היחידה"

א. נכון. ב. אינו נכון. ג. נכון רק אם $T=I$. ד. נכון רק אם β

13. יהי $W=\{T \in Hom({}^{11}F, {}^{11}F) \mid Te_1=0\}$ אז $\dim W$ הוא

א. 110. ב. 100. ג. 10. ד. 11.

14. A מטריצה משולשת מעל שדה ונניח שהיא הפיכה; אז

א. $trA \neq 0$.

ב. כל הרכיבים באלכסון של A שונים מ-0.

ג. $A+A^t$ הפיכה.

ד. $A+A^{-1}$ הפיכה.

15. A,B מטריצות ממשיות 3x3 ונתון שאחת המטריצות הבאות היא $AB-BA$. זהה אותה.

א. $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. ב. $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\-6&-6&-6\end{pmatrix}$. ג. $\begin{pmatrix}1&-2&3\\-4&5&-6\\7&-8&9\end{pmatrix}$. ד. $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

16. נניח שאופרטור ליניארי T של מרחב וקטורי מקיים $T^3=0$. נסמן $S=I+T+T^2$. אז

א. $S \neq I$. ב. $S \neq I+T$. ג. $S=I-T$. ד. $S=(I-T)^{-1}$

17. V מרחב וקטורי בעל ממד אי-זוגי, T אופרטור ליניארי של V ונניח $T^2=0$; אז

א. $\rho_T \le \nu_T$ ויתכן שוויון.

ב. $\rho_T \ge \nu_T$ ויתכן שוויון.

ג. $\rho_T < \nu_T$.

ד. $\rho_T > \nu_T$.

שאלון מס' 2. 90 דקות.

עליך לענות על שלוש מבין ארבע השאלות הבאות.

1. בטופס נרשמה הצורה המדורגת D של מטריצה מסוימת A ממשית, אולם שלוש רכיבי D נמחקו. ידוע כי הרכיבים של D שאינם בהכרח 0 או 1 שווים כולם ל-7.

$$D=\begin{pmatrix}\cdot&7&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&7\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

(א) רשום בסיס למרחב הפתרון של המערכת ההומוגנית $AX=0$.

(ב) האם נכונה הטענה „למערכת $AX=\begin{pmatrix}7\\7\\7\\0\\0\end{pmatrix}$ יש פתרון"? נמק.

(ג) נניח שידוע כי למערכת המשוואות $AX=b$ יש וקטור פתרון שכל רכיביו שווים ל-2. רשום הפתרון הכללי של המערכת הזאת.

2. V מרחב וקטורי מעל שדה; U,W מרחבים חלקיים של V.

(א) הוכח: אם $U \not\subseteq W$ וגם $W \not\subseteq U$ אז $U \cup W$ אינו מרחב חלקי של V.

(ב) הוכח: (i) כל מרחב חלקי של V המכיל את $U \cup W$ מכיל גם את $U+W$.

(ii) כל מרחב חלקי של V המוכל ב-$U \cup W$ מוכל כולו ב-U או ב-W.

3. V מרחב וקטורי מעל שדה שבו $1+1 \neq 0$, $T \in Hom(V,V)$ מקיים $T^2=I$. נסמן $U=\{u \mid u \in V, Tu=u\}$, $W=\{w \mid w \in V, Tw=-w\}$.

(א) הראה: (i) U,W מרחבים חלקיים של V וכן $U \cap W=\{0\}$.

(ii) $U \oplus W=V$.

(ב) האם נכונה הטענה „אם $v \in V$ אז או $Tv=v$ או $Tv=-v$"? נמק.

(ג) אם V בעל ממד סופי ואם B,B' בסיסים של U,W בהתאמה, מה צורת $[T]_{B \cup B'}$?

(ד) הוכח: אם A מטריצה $n \times n$ ממשית שהיא הפוכה לעצמה אז עקבתה trA מספר שלם המקיים $-n \le trA \le n$.

4. (א) V מרחב וקטורי מעל שדה וממדו 3. נתון $T \in Hom(V,V)$ עם $T^2 \neq 0$, $T^3=0$. הוכח: יש בסיס B של V אשר $[T]_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

(ב) A,B מטריצות 3x3 מעל שדה המקיימות $A^3=0=B^3$, $A^2 \neq 0 \neq B^2$. הוכח: A,B דומות ועקבותיהן $=0$.