3

בס"ד

אלגברה לינארית. 88-110-01 סמ' ב' תשנ"ג

שעורים. ארבע שאלות.

1. תהי A מטריצה מסדר n הפיכה, הראה

$$|adj A| = |A|^{n-1} \quad , \quad adj(adj A) = |A|^{n-2} A$$

2. יהי V מרחב וקטורי ממימד n. הראה: יש אופרטור לינארי $T: V \to V$ עם $\ker T = Im\, T$ אם ורק אם n מספר זוגי.

3. תהי A מטריצה ריבועית הפיכה. הראה: יש פולינום $g(t)$ ממעלה $\le n-1$ כך שמתקיים $A^{-1} = g(A)$.

4. תהי A מטריצה משולשית עם פולינום אופייני $t^2(t-1)^2(t-2)$.
(א) (i) מה סדר המטריצה? (ii) האם A הפיכה? (iii) האם המטריצה $A+I$ הפיכה? נמק.
(ב) נניח שלמטריצה A הנ"ל יש 5 וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. (i) מהו הפולינום המינימלי של A ומדוע? (ii) אם 5 וקטורים אלה מסודרים במטריצה P תאר את "המטריצה הריקה" בשוויון $AP = P(\quad)$.

5. במרחב $\mathbb{C}^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית נתון $U = Sp\{(1111),(1120)\}$
(א) חשב בסיסים אורתונורמליים עבור $U^{\perp}, U$.
(ב) מצא אופרטור אוניטרי $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ אשר יקיים $T(U) = U^{\perp}$.

6. יהי $T: V \to V$ אופרטור נורמלי, V מרחב עם מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.
(א) הראה (i) $\|Tu\| = \|T^*u\|$ לכל $u \in V$; (ii) $T^2u=0,\ u \in V \Leftarrow Tu=0$.
(ב) הוכח: אם V סוף ממדי אז T ניתן ללכסון.

(48)

[illegible]. 4 שאלות.

1. יהי $V = \{(x_1,\dots,x_n),\ \sum_{i=0}^{n} x_i = 0\} \subseteq F^n$, F שדה. (א) הראה: V תת-מרחב של F^n. (ב) הצג בסיס של V. (ג) כמה וקטורים יש ב-V אם $F = \mathbb{Z}_p$?

2. יהי V מרחב וקטורי, U, W תת-מרחבים ונניח $\dim V = 10, \dim W = 6, \dim U = 9$.
(א) מה ניתן לומר על $\dim(U \cap W)$ ומדוע?
(ב) נניח $W \not\subseteq U$. (i) מהו $U + W$ ומדוע? (ii) הראה כי אם 6 וקטורים של W שהם [illegible] נמצאים ב-U אז הם תלויים לינארית.

3. נתונה מערכת משוואות מעל $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad\quad - 3x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

(א) פתור את המערכת ורשום בסיס למרחב הפתרון. (ii) האם יש פתרון למערכת (עם המקדמים כנ"ל) אבל עם אגף ימין רשום $\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ (במקום $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$)? אם יש רשום את הפתרון. אם אין - נמק מדוע אין.
(ב) $T: \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ מוגדרת ע"י

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1 + x_2 - 3x_4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4\end{pmatrix}.$$

רשום בסיס לגרעין של T ובסיס לתמונה של T.

4. יהי V מרחב וקטורי, $T \in hom(V,V)$. הוכח: אם $T^2 = T$ אז $V = N_T \oplus R_T$.

5. יהי V אוסף המטריצות המרוכבות $\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \bar{b} & 2a\end{pmatrix} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{C}\right\}$.
(א) הראה: V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ואינו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ (בפעולות הרגילות).
(ב) מצא בסיס של V מעל $\mathbb{R}$.
(ג) תהי $M = \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}$ ונגדיר $T(A) = MA - AM$ לכל $A \in V$. הראה $T \in hom(V,V)$ (מעל $\mathbb{R}$). חשב את המטריצה של T לפי הבסיס שהצגת ב-(ב).

6. יהי V מרחב וקטורי, $v_1, \dots, v_n \in V$, $v'_k = \sum_{i=k}^{n} v_i$ $(k = 1,\dots,n)$.
נסמן $B = \{v_1,\dots,v_n\}$, $B' = \{v'_1,\dots,v'_n\}$.
(א) (i) הראה שאם B בסיס של V אז B' בסיס של V. (ii) רשום מטריצת המעבר מ-B אל B'. חשב את המטריצה ההפוכה.
(ב) אם $T \in hom(V,V)$ אשר מטריצתו לפי B היא $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 2 & \\ 0 & & n\end{pmatrix}$ חשב את המטריצה של T לפי B'.