המחלקה למתמטיקה

סמסטר ב' מועד ב'
שנת תשמ"ז
אלגברה ליניארית 88-110-01
ע"י פרופ' זכי ארד

חלק 1 שאלון ראשון

שנה טובה ומאושרת.

ענה על שתי שאלות בשעה וחצי

① על $\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים ממעלה ≤ 2 מעל שדה $\mathbb{R}$ המקדמים מגדירים מכפלה פנימית ע"י: $p(x)=\sum_{i=0}^{2} a_i x^i$, $q(x)=\sum_{i=0}^{2} b_i x^i$

$(p(x), q(x)) = (a_0+a_1)(b_0+b_1)+a_1b_1+a_2b_2$

נגדיר פונקציונל ליניארי $f: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ ע"י: $f(p(x)) = p'(-1) = a_1 - 2a_2$

א. הוכח שהמכפלה שהוגדרה אכן היא פנימית.

ב. מצא פולינום $g(x)\in \mathbb{R}_2[x]$ שעבורו מתקיים: $f(p(x)) = (p(x), g(x)) \quad \forall p(x)\in\mathbb{R}_2[x]$

ג. מצא המרחב $W^{\perp}$ עבור $W=Sp\{1+x^2\}$

② יהי V מ"ו מעל שדה F ממימד סופי n ויהי $T\in L(V)$ מדרגה r כאשר $0<r<n$, נניח שקיים סקלר $c\neq 0$ כך ש: $cT=T^2$.

א. חשב את הפולינום המינימלי והאופייני של T.

ב. הראה שמרחבי הע"ע של T הם הגרעין והתמונה של T.

③ יהי $F=\mathbb{Z}_3$ השדה עם 3 איברים, נתונה הטרנספורמציה $T: M_2(F)\to M_2(F)$ המוגדרת עבור $\forall X\in M_n(F)$ ע"י $T(X)=AX-XA$ כאשר $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$ ($M_n(F)$ מרחב המטריצות הריבועיות מסדר n×n עם מקדמים מ-F).

א. הוכח כי T ליניארית ומצא בסיסים ל $KerT$ ו ImT

ב. חשב הפולינום המינימלי והאופייני של T. האם T ניתנת ללכסון?

ג. מה הם מרחבי הע"ע של T

~~ד. ... מטריצה של T ע"י בלוק אלכסוני ...~~

שאלון 2

המחלקה למתמטיקה

סמסטר ב' מועד ב'
שנת תשמ"ז
אלגברה ליניארית 88-110-01
ע"י פרופ' זכי ארד

שנה טובה ומאושרת

ענה על כל השאלות. סמן התשובה הנכונה ב-X
תשובה לא נכונה מורידה 1%.

מס' מחברת	
מספר זהות	

מלא וצרף השאלון הפתור למחברת

שאלה 1: יהי V מ"ו כך מימד 10, $T\in L(V)$ מקיים $T^{20}=0$ אז

א. ☐ $T^9=0$
ב. ☐ $T^2=0$
ג. ☒ $T^{10}=0$
ד. ☐ $T^{19}\neq 0$

שאלה 2: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&5&6\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}6&6&6\\0&4&4\\0&0&1\end{pmatrix}$

א. ☐ ל-A ו-B אותו פולינום אופייני אבל לא אותו פולינום מינימלי.
ב. ☐ אם $PA=BP$ אז P הפיכה
ג. ☒ יש P הפיכה כך ש $PA=BP$.

שאלה 3: נתון כי $A\in M_n(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, מטריצה ריבועית n×n עם מקדמים משדה $\mathbb{R}$, מקיימת $a_{ij}=-a_{ji}$ אזי

א. ☐ $|A|=0$ לכל n
ב. ☐ $|A|=0$ לכל n זוגי
ג. ☒ $|A|=0$ לכל n אי-זוגי

שאלה 4: עבור סקלר מסוים c ומטריצה מסוימת A מתקיים $\det(AX)=c$ לכל מטריצה X ריבועית n×n. אזי

א. ☐ $A=0$
ב. ☒ $c=0$
ג. ☐ אין A, C המקיימים זאת.