(5)

שם המרצה: כצ'נקוב אנדרי

1) לפתור מערכת משוואות לינארית:

$$12x_1+9x_2+3x_3+10x_4=13$$
$$4x_1+3x_2+x_3+2x_4=3$$
$$8x_1+6x_2+2x_3+5x_4=7$$

2) לאיזה מספר ממשי λ וקטור $b=(1,1,\lambda^2)\in\mathbb{R}^3$ הוא צירוף לינארי של וקטורים: $a_1=(-1,2,\lambda)$, $a_2=(1,-1,-1)$

3) לאיזה מספר ממשי λ נכון שאם וקטורים v_1 ו- v_2 ($v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$) בלתי תלויים לינארית אז גם וקטורים $(v_1+\lambda v_2)$ ו- (λv_1+v_2) הם בלתי תלויים לינארית.

4) למצוא את הבסיס בתת-מרחב לינארי של $\mathbb{R}^4$ שנפרש ע"י וקטורים: $a_1=(1,2,-1,2)$, $a_2=(2,3,0,-1)$, $a_3=(1,2,1,4)$, $a_4=(1,3,-1,0)$

5) אם $b=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$ הוא וקטור עמודה מספר n ו- $a=(a_1,\dots,a_n)$ הוא וקטור שורה מספר n. מה הדרגה (יכולה להיות) של מטריצה מסדר $n\times n$

$$b\cdot a=\begin{pmatrix}b_1a_1 & b_1a_2 & \dots & b_1a_n\\ b_2a_1 & b_2a_2 & \dots & b_2a_n\\ \vdots & & & \vdots\\ b_na_1 & b_na_2 & \dots & b_na_n\end{pmatrix}$$

6) לתת דוגמה של העתקה T מ- V ל- V ($T:V\to V$) כך ש: $V\neq \operatorname{Ker}T\oplus \operatorname{Im}T$.

7) האם תמיד קיימת לכל תת-מרחב $U\subset W$ העתקה $T:V\to W$ (V ו- W מרחבים לינאריים נתונים) כך ש: $\operatorname{Im}T=U$. איך זה תלוי ב- $\dim V$, $\dim U$ ו- $\dim W$?

זמן הבחינה שעתיים וחצי; צריך לפתור 5 משימות.

(6)

אלגברה לינארית

מרצה: כצ'נקוב אנדרי, 88-110-04

1) להוכיח שכל תת-מרחב לינארי שנפרש ע"י קבוצה של וקטורים אופ"נים כלשהיא הוא תת-מרחב אינווריאנטי!

2) אם $A:V\to V$ העתקה לינארית וכל וקטור ב- V הוא וקטור אופ"ני של A אז $A=Id$.

3) להוכיח שמספר וקטורים אופ"נים אם ערך אופ"ני λ בלתי תלויים לינארית לא גדול מריבוי של שורש λ בפולינום מינימלי של העתקה (אפשר שהשתמש בצורת ז'ורדן Jordan)

4) אם P_2 הוא מרחב של פולינומים עם מעלה ≤ 2 עם מקדמים ממשיים לבנות בסיס אורתונורמלי ב- P_2 ביחס למכפלה פנימית:

א) $f(x),g(x)\in P_2$, $\langle f,g\rangle_1=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\,dx$

ב) אם $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2$ אז $\langle f,g\rangle_2=a_0b_0+a_1b_1+a_2b_2$

5) אם V מרחב אוקלידי ו- T העתקה לינארית. אז $(\operatorname{Im}T)^{\perp}=\operatorname{Ker}(T^*)$.

6) מה הם ערכים אופ"נים של מטריצה $B=A^t\cdot A$ (סדר של B הוא $n\times n$) איפה $A=(a_1,a_2,\dots,a_n)$ - וקטור-שורה.

7) $M_n(\mathbb{C})$ - מרחב של מטריצות מסדר $n\times n$ מעל $\mathbb{C}$. נגדיר $(X,Y)=tr(X\bar{Y}^t)$ מכפלה הרמיטית, $X,Y\in M_n(\mathbb{C})$. מה הוא המשלים הניצב של:

א) תת-מרחב של מטריצות על-אלכסוניות $\begin{pmatrix}0 & *\\ & 0\end{pmatrix}$;

ב) תת-מרחב של מטריצות A אם $tr A=0$.

8) אם V מרחב אוניטרי ו- $T:V\to V$ העתקה אוניטרית, $\dim V=n$, אז קיימים תת-מרחבים אינווריאנטים של T שלהם מימדים מ-1, עד n.