פרופ' ש. קפלנסקי. אלגברה לינארית, ס"א, מ"ב, תשנ"ה. 88-110-07

משך הבחינה: 3 שעות.

בחירה: 4 מתוך 5.

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי עזר אסורים או יתפס בהעתקה יענש בחומרה עד כדי הרחקתו מהאוניברסיטה.

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

מעל השדה הסופי $F=\{0,1,2,3,4\}$ (עם הפעולות מודולו 5).

א) הוכח ש-A הפיכה, וחשב את ההפכית A^{-1} (האיברים של A^{-1} צריכים להיות בקבוצה $F=\{0,1,2,3,4\}$!).

ב) השתמש בא) כדי לפתור את מערכת המשוואות (מעל F!!)

$$\begin{cases} 3x + 2y + z + u + v = 2 \\ 2x + y + 3z + 2u + 3v = 1 \\ x + 3y + 2z + 3u + 2v = 3 \\ x + y + z + u + v = 1 \end{cases}$$

2. יהי F שדה, $n \geq 2$, ו-$A \in M_n(F)$. הוכח:

א) $|\mathrm{adj} A| = |A|^{n-1}$ (גם במקרה ש-$|A|=0$!):

ב) אם $|A| \neq 0$, אזי $\mathrm{adj}(\mathrm{adj} A) = |A|^{n-2} A$.

3*. יהי X מרחב וקטורי בעל ממד n, מעל השדה F, ותהיינה $S,T \in \mathrm{Hom}(X,X)$.
הוכח שההעתקה הלינארית $S+\lambda T$ לא הפיכה עבור לכל היותר n λ-ים ב-F.

*הערה: השאלה לא נכונה. ניקח למשל $S = T = 0$.
אם T הפיכה, למשל, אז השאלה נכונה. [illegible]

5. (שלבי הפתרון: א) ⇐ ב) ⇐ ג))

א) יהי T אופרטור לינארי במרחב מכפלה פנימית X. הוכח שאם $x \in X$ מקיים $T^*Tx=0$, אזי $Tx=0$.

ב) יהי T אופרטור לינארי צמוד לעצמו ב-X. הוכח שאם $x \in X$ מקיים $T^k x=0$ (לכל k טבעי מסוים), אזי $Tx=0$ (חשוב על אינדוקציה על k!!).

ג) יהי T אופרטור נורמלי ב-X. הוכח שאם $x \in X$ מקיים $T^k x = 0$ (ל-k טבעי מסוים), אזי $Tx=0$ (רמז: הסתכל על $S := T^*T$ צמוד לעצמו, והפעל את ב)).

6. תהי A מטריצה ריבועית סימטרית מעל $\mathbb{R}$. אם B מטריצה סימטרית כלשהי מעל $\mathbb{R}$, נסמן את דרגתה ב-$r(B)$ ואת הסיגנטורה שלה ב-$\sigma(B)$. הוכח שלכל k טבעי,

$$r(A^k) = r(A) \quad , \quad \sigma(A^k) = \begin{cases} \sigma(A) & \text{ל-}k\text{ אי-זוגי!} \\ r(A) & \text{ל-}k\text{ זוגי!} \end{cases}$$

בהצלחה!