(13)

(88-110-04) אלגברה לינארית \ ד"ר כון עדין

בחינת סוף סמסטר ב' (מועד ב')

ועדת המשמעת
נבחן שימצאו
עזר אסורים או
יענש בחומרה עד כדי
מהאוניברסיטה

(18)

* זמן הבחינה: שעתיים וחצי.
* אין להשתמש בחומר-עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
* יש לפתור 4 מתוך 6 השאלות. אם פתרת יותר מארבע שאלות, נא סמן ארבע מהן לבדיקה - אחרת תיבדקנה ארבע הראשונות.
* נא לכלול את כל החישובים במחברת הבחינה. קטעי-טיוטה שאינם מיועדים לבדיקה אפשר למחוק בקו; מומלץ להשתמש בצד אחד של הדף לגרסה סופית "נקיה", ובצד השני לטיוטה.

ניקוד מלא ינתן לתשובה הכוללת את כל ההסברים והחישובים הנחוצים.

בהצלחה!

① א. הגדר: מרחב מכפלה פנימית.

ב. יהי V מרחב הפולינומים עם מקדמים ממש"ם, ונגדיר ב-V מכפלה פנימית ע"י

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \quad (f, g \in V)$$

הנקודות $A=0$, $B=x$, $C=3x-2$ הן קדקדים של משולש ב-V. מצא את ארבי צלעות המשולש.

ג. חשב את זוויות המשולש הנ"ל (למשל: הזווית בין הוקטור $A-B$ לוקטור $C-B$, וכו'); בדוק שסכומן $180°$.

② תהי

$$A = \begin{pmatrix} 2&1&1&1&1\\ 2&3&2&2&2\\ 3&3&4&3&3\\ 4&4&4&5&4\\ 5&5&5&5&6 \end{pmatrix}.$$

א. חשב את $\det(A)$ ואת $tr(A)$.

ב. מצא את הערכים העצמיים של A (כולל ריבוי), ובדוק התאמה לתוצאות סעיף א'.

2\..

(19)

③ אופרטור לינארי $P: V \to V$ נקרא היטל אם $P^2 = P$.

א. הוכח שאם λ ע"ע של היטל אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

ב. הוכח שאם P היטל במרחב מכפלה פנימית V אז P נורמלי $\iff$ P הרמיטי.

ג. הוכח שאם P היטל במרחב מכפלה פנימית V אז P אוניטרי $\iff$ $P = I$.

④ א. הגדר: דמיון מטריצות.

ב. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F}$ שדה כלשהו).

הוכח שאם $\det(A) \neq 0$ או $\det(B) \neq 0$ אז המטריצות AB, BA דומות.

ג. עבור $A = \begin{pmatrix} 0&1\\ 0&0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&0 \end{pmatrix}$

האם AB, BA דומות? נמק.

⑤ א. הגדר: דרגת שורות, דרגת עמודות.

ב. הוכח כי אם $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ($\mathbb{F}$ שדה כלשהו) אז

$$\operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

ג. הוכח כי (בתנאים הנ"ל)

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A).$$

⑥ א. הגדר: פולינום אופיני.

ב. הוכח (עבור מטריצה ריבועית A):

$\det(A) = 0 \iff \lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A.

ג. פתור את מערכת המשוואות הבאה באמצעות דטרמיננטות (כלל קרמר); בדוק נכונות הפתרון.

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 7 \end{cases}$$