(11)

③ א. הגדר: מטריצה הפיכה, מטריצה משוחלפת.
ב. הוכח כי עבור מטריצה הפיכה A:

$$(I + A)^{-1} = I + A^{-1} \iff A^2 + A + I = 0.$$

ג. מצא מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיימת $A^2 + A + I = 0$,
ובדוק עבורה את טענת סעיף ב'.
(רמז: נסה $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & d \end{pmatrix}$.)

④ א. הוכח כי $W + W = W$ לכל תת-מרחב W של מרחב וקטורי V.
ב. הוכח כי, עבור $V = (\mathbb{Z}_p)^n$: תת-קבוצה W של V היא
תת-מרחב של V (מעל $\mathbb{Z}_p$) אםם W סגורה לחיבור ולא ריקה.
ג. הראה (ע"י דוגמא) שטענת סעיף ב' אינה נכונה עבור
$V = \mathbb{R}^n$ (מעל $\mathbb{R}$).

⑤ א. הגדר: תלות לינארית, פרישה לינארית.
ב. האם הפולינומים הבאים (מעל $\mathbb{R}$) תלויים לינארית?

$$1 + x + x^3, \quad 1 - 2x + 2x^4, \quad 3 - x + x^4, \quad 1 - x^3 - x^4$$

ג. מצא בסיס לתת-המרחב של $\mathbb{R}[x]$ הנפרש ע"י הפולינומים הנ"ל.

(13)

(5) א. הגדר: קבוצת וקטורים בלתי-תלויה לינארית, בסיס (במרחב וקטורי).
ב. הוכח שאם V מרחב וקטורי n-ממדי, ואם $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$,
אז S בסיס $\iff$ S בלתי-תלויה לינארית.
ג. בדוק האם הוקטורים הבאים מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^4$:
$(1,2,3,4)$, $(1,4,1,-2)$, $(1,3,3,1)$, $(0,1,2,-3)$.

(6) א. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, ויהיו W_1, W_2 תת-מרחבים של V.
הוכח כי:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

ב. נתון כי:
$\dim V = 5$, $\dim W_1 = 4$, $\dim W_2 = 3$.
רשום את כל הממדים האפשריים עבור $W_1 \cap W_2$; נמק את תשובתך.

(7) יהי $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, ונגדיר:
$W_1 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = A\}$ (מטריצות סימטריות)
$W_2 = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t = -A\}$ (מטריצות אנטי-סימטריות)
א. הוכח כי W_1, W_2 הם תת-מרחבים של V, וכי
$V = W_1 \oplus W_2$.
ב. עבור $n = 3$ מצא את ממדי W_1, W_2; בדוק שסכומם הוא $\dim V$.

(8) א. הגדר: גרעין ותמונה (של העתקה לינארית).
ב. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2 = 0$.
הוכח כי $\mathrm{im}\,T \subseteq \ker T$; תן דוגמא שבה יש הכלה ממש
ודוגמא שבה יש שוויון.
ג. הסק כי, בתנאי סעיף ב' לעיל:
$\dim(\ker T) \geq \frac{1}{2}\dim V$.