(10)

## אלגברה לינארית (88-110) / ד"ר רון אדין

## בחינת סיום (מועד ב')

⑥

* זמן הבחינה: שעתיים. (אין להשתמש בחומר עזר.)

* יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות; כולן שוות-משקל.

* נא לסמן במפורש איזו שאלה מיועדת לבדיקה (אם פתרת יותר מ-4) – אחרת תיבדקנה 4 הראשונות.

* נא לכתוב בכתב ברור ונקי, כל שאלה בדף נפרד. טיוטת חישובים יש לרשום במחברת הבחינה (או במחברת מצורפת), ולמחוק בקו כל מה שאינו מיועד לבדיקה.

* ניקוד מלא יינתן לתשובה מנומקת היטב, הכוללת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

① יהי $V=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור הגזירה: $T(a+bx+cx^2)=b+2cx$.

א. מצאו את המטריצה המייצגת את $T$ לפי הבסיס הסדור $B_1=(1,x,x^2)$ של $V$.

ב. מצאו את מטריצת המעבר מהבסיס $B_1$ לבסיס $B_2=(x^2,x^2+1,x^2+x)$.

ג. מצאו את המטריצה המייצגת את $T$ לפי הבסיס $B_2$ בשתי דרכים: ישירות, ובאמצעות סעיף ב'.

② א. הוכח כי $tr(AB)=tr(BA)$ לכל $A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$.

ב. הוכח כי אם $A,B\in\mathbb{C}^{2\times2}$ אז $(AB-BA)^2$ היא מטריצה סקלרית. (רמז: השתמש בסעיף א'!)

2\..

⑦

③ א. הגדר: סכום, סכום ישר (של) תת-מרחבים.

ב. יהי $V$ מרחב וקטורי ויהיו $W_1, W_2$ תת-מרחבים של $V$. נתון כי:

$$\dim V=7,\quad \dim W_1=5,\quad \dim W_2=4.$$

הוכח כי $2\le \dim(W_1\cap W_2)\le 4$.

④ א. הגדר: תת-שדה (של שדה נתון), תת-מרחב (של מרחב וקטורי נתון).

ב. הוכח שהקבוצה $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ (כאשר $\mathbb{Q}$ הוא שדה המספרים הרציונליים) היא תת-שדה של $\mathbb{R}$ (שדה המספרים הממשיים). רשום במפורש את הפעולות ב-$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, וציין אילו אקסיומות אתה בודק ישירות ואילו נובעות מתכונות ידועות של שדות אחרים.

ג. האם $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{R}$, כמרחב וקטורי מעל השדה $\mathbb{R}$? מעל השדה $\mathbb{Q}$?

⑤ א. הבא את המטריצה הבאה לצורה מדורגת קנונית (מצומצמת שורה):

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

ב. בדוק האם

$$(1,2,4,5)\in \mathrm{span}\{(2,1,5,2),(1,1,3,1),(1,-2,0,3)\}$$

(הסבר את פעולותיך).

⑥ א. הגדר: גרעין ותמונה (של העתקה לינארית).

ב. יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים $T^2=T$. הוכח כי $\mathrm{im}\,T\cap\ker T=\{\vec{0}\}$.

ג. הסק כי, בתנאים של סעיף ב' לעיל: $\mathrm{im}\,T\oplus\ker T=V$.

[רמז: ממדים.]