(88-110) אלגברה לינארית \ ד"ר רון לדין

המבחן מול סמסטר א'

(4)

* פתור את 4 מתוך 6 השאלות שלפניך; כל השאלות שוות-משקל.
* אין להשתמש בספרים, מחברות, דפי-עזר או מחשבים ניידים.
* על רשום את הפתרון בחברת נקי לחלוק על גבו האחורי של הדף.
  כל שאלה תיפתר בדף נפרד.
* ניתן להשתמש בטיוטה בגבו השני של הדף. במידת הצורך ניתן לקבל מחברת נוספת ממשגיח הבחינה; על לסמן במפורש את סדר המחברות.
* קטעים שאינם מוזכרים לעניין הבודק, על למחוק בקו.
* אם פתרת יותר מ-4 שאלות, על כין במפורש את 4 השאלות שברצונך שיבדקו.
* על לפרט את החישובים והשיקולים השונים. נקודה מלאה ניתן לתשובה מנומקת היטב הכוללת את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

(1) א. הגדר: דרגת שורות, דרגת עמודות, דרגה (של מטריצה).

ב. הוכח כי לכל A, B הן מטריצות כך שהמכפלה AB מוגדרת, מתקיים $\text{rank}(AB) \le \text{rank}(A)$ וגם $\text{rank}(AB) \le \text{rank}(B)$.

ג. הוכח כי לכל מטריצה $A \in F^{m\times n}$:

$\text{rank}(A) \le k \iff$ קיימות מטריצות $B \in F^{m\times k}$, $C \in F^{k\times n}$ כך ש $A = B\cdot C$.

(2) א. מצא את A^{-1} עבור $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. בדוק שאמנם $A\cdot A^{-1} = I$.

ב. פתור בעזרת מסקנא מסעיף א' את המערכת:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

(פתרון בשיטה אחרת יגרור בניקוד חלקי)

(4)

(3) א. הגדר: אופרטור אוניטרי, אופרטור הרמיטי.

ב. הוכח כי לכל S, T הם אופרטורים אוניטריים אזי גם ST הוא אופרטור אוניטרי.

(3)

ג. הוכח כי לכל S, T הם אופרטורים הרמיטיים, אזי ST אופרטור הרמיטי $\iff$ S, T מתחלפים ($ST=TS$).

(4) יהי $T: V \to V$ אופרטור לינארי המקיים: $\text{im}\,T = \ker T$.

א. רשום פולינום המתאפס ע"י T.

ב. הוכח ש T איזומורפי. מהו הפולינום המינימלי של T? נמק היטב את תשובתך.

ג. רשום דוגמא מפורשת של אופרטור T כנ"ל.

(5) נתונה המטריצה

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

א. נמק מדוע A ניתנת לכסון (כלי לכסון בסעיף).

ב. חשב (ישירות) את $\det(A)$.

ג. מצא את המטריצה A^2, בעזרת התוצאה למצוא מסעיף ב'.

ד. מצא את הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי: (אפשר להסתפק בסעיפים קודמים).