אלגברה לינארית סמסטר א' תשס"ה
מועד ב'

אלגברה לינארית (88-110) / ד"ר רן עדין

בחינת סוף סמסטר א' (מועד ב')

8

* זמן הבחינה: שעתיים.
* אין להשתמש בחומר-עזר, פרט למחשב-כיס פשוט.
* יש לפתור 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרת 5 שאלות, נא סמן אילו 4 מיועדות לבדיקה — אחרת תיבדקנה 4 הראשונות.
* נא לכתוב את כל החישובים במחברת הבחינה. קטעי-טיוטה שאינם מיועדים לבדיקה אפשר למחוק בקו; מומלץ להשתמש בצד אחד של הדף לגרסה סופית "נקיה", ובצד השני לטיוטה.
* ניקוד מלא ינתן לתשובה הכוללת את כל ההסברים והחישובים הנחוצים.

בהצלחה!

① א. פתור את מערכת המשוואות הבאה מעל $\mathbb{Z}_3$:

$$\begin{cases} x+\bar{2}y+z = \bar{1} \\ \bar{2}x+\bar{2}y+z+w=\bar{0} \\ x+y+w=\bar{2} \\ x+\bar{2}z+\bar{2}w=\bar{0} \end{cases}$$

ב. פתור את אותה מערכת מעל $\mathbb{Z}_5$.

ג. תן דוגמא למערכת משוואות לינאריות שאין לה פתרון מעל $\mathbb{Z}_3$, אך יש לה פתרון מעל $\mathbb{Z}_5$.

② א. הגדר: גרעין ותמונה (של העתקה לינארית).

ב. יהי $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ האופרטור הלינארי המוגדר ע"י:

$$T(x,y,z) = (x+y-z,\ x-2iy,\ (i-1)x+y+z).$$

מצא בסיס ל-$\ker T$.

ג. (עבור T הנ"ל) מצא בסיס ל-$\operatorname{im}T$.

2\..

③ א. הגדר: מרחב מכפלה פנימית.

ב. הוכח כי אם v_1,v_2,v_3,v_4 הם וקטורים במרחב מכפלה פנימית המקיימים

$$\langle v_i,v_j\rangle = \begin{cases} 3, & i=j \text{ אם} \\ -1, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אז: $v_1+v_2+v_3+v_4=0$.

④ יהי $T\in Hom(V,V)$ אופרטור לינארי המקיים: $T^2=T$. (T נקרא "הטלה".)

א. הוכח כי, לכל $v\in V$: $v-Tv\in\ker T$, והסק כי $V=\operatorname{im}T+\ker T$.

ב. הוכח כי $V=\operatorname{im}T\oplus\ker T$ (סכום ישר).

ג. הראה כי אם $v_1\in\operatorname{im}T$, $v_2\in\ker T$ אז $T(v_1+v_2)=v_1$.

⑤ א. הגדר: מטריצה בצורת ז'ורדן.

ב. מצא את צורת ז'ורדן של המטריצה

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ג. האם המטריצה A דומה למטריצה $I-A$? נמק.