(88-110) אלגברה לינארית / ד"ר רון עדין

בחינת סוף סמסטר א'

(4)

* בתוך זמן 4 מתוך 6 השאלות שלפניך, כל השאלות שוות-משקל.
* אין להשתמש בספרים, מחברות, דפי-עבר או מחשבים למיניהם.
* יש לרשום את ההתכון בבהיר: לכתוב על צדו האחד של הדף. כל שאלה תיכתב בדף נפרד.
* ניתן להשתמש בטיוטה בצדו השני של הדף. במידת הצורך ניתן לקבל מחברת נוספת מהשגחה בהיר.
* קטעים שאינם מועדים לעיון הבודק, יש למחוק בקו.
* אם כתבת יותר מ-4 שאלות, יש לציין במפורש את 4 השאלות שרצונך שיבדקו.
* יש לכתוב את החישובים והשיקולים השונים. נוסף על כך ניתן לתשובה מנומקת היטב הכולל את כל החישובים הנחוצים.

בהצלחה!

(1) א. הגדר: דרגת שורות, דרגת עמודות, דרגה (של מטריצה).

ב. הוכח כי אם A, B הן מטריצות כך שהמכפלה AB מוגדרת אז $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(A)$ וגם $\operatorname{rank}(AB)\le\operatorname{rank}(B)$.

ג. הוכח כי לכל מטריצה $A\in F^{m\times n}$:

$\operatorname{rank}(A)\le k \iff$ קיימות מטריצות $B\in F^{m\times k}$, $C\in F^{k\times n}$ כך ש $A=B\cdot C$.

(2) א. חשב את A^{-1} לכל $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$. בדוק שמתקיים $A\cdot A^{-1}=I$.

ב. פתור בעזרת מציאת סדרת א' את המערכת:

$$\begin{cases}x+2y+z=1\\2x+y+z=2\\x+y+2z=3\end{cases}$$

(בתנאי בשיטה אחרת יוענק בונוס חלקי)

(3) א. הגדר: אופרטור אוניטרי, אופרטור הרמיטי.

ב. הוכח כי אם S, T הם אופרטורים אוניטריים אז גם ST הוא אופרטור אוניטרי.

ג. הוכח כי אם S, T הם אופרטורים הרמיטיים, אז ST אופרטור הרמיטי $\iff$ S, T מתחלפים ($ST=TS$).

(4) יהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים: $\operatorname{im}T=\ker T$.

א. רשום פולינום המתאפס ע"י T.

ב. הוכח ש T אינו ניתן לכסון. מהו הפולינום המינימלי של T? נמק היטב את תשובתך.

ג. רשום בלוק אחד מפורשת של אופרטור T כנ"ל.

(5) נתון המטריצה

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

א. נמק מדוע A ניתנת לכסון (הלוכסן בפועל).

ב. חשב (ישירות) את $\det(A)$.

ג. מצא את המטריצה A^2, בעזרת התוצאה המתקבלת סעיף ב'.

ד. מצא את הערכים העצמיים של A, כולל ריבוי: (אפשר להסתפק בסעיפים קודמים).