F-100

חשבון דיפרנציאלי ואנטגרלי 1 (0366-1101-08)

מבחן מועד א, סמ׳ ב, תש"ע, 25/6/2010

פרופ׳ י.אהרונסון

[1]

הנחיות:

זמן המבחן: שלש שעות. ענה על שאלה מס׳ 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא שימוש בחומר עזר. הוכח את תשובותיך. סמן את מספרי שאלות עליהן ענית על מחברת מס׳ I.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק׳) אם $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה, אזי קיים $x\in[0,1]$ כך ש- $f(x)=x$.

ב) (5 נק׳) קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\sin(n)\sin(\frac{1}{n})\in\mathbb{R}$.

ג) (5 נק׳) אם $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $\epsilon>0$ ולכל $\delta>0$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ לכל $x,y\in(0,1)$ ועבורם $|x-y|<\delta$.

ד) (5 נק׳) אם $a,\, b>0$, אזי $(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\longrightarrow a+b$ כאשר $n\to\infty$.

2. (20 נק׳)

א) תהי A קבוצה אינסופית, חסומה של מספרים ממשיים. בסעיף זה מוכיחים את משפט Bolzano-Weierstrass. תהי

$$B=\{x\in\mathbb{R}:\ \#(x,\infty)\cap A=\infty\}.$$

הוכח כי B הינה קבוצה לא ריקה והסומה מלעיל שחסם העליון שלה היא נקודת הצטברות של A (ז"א $\sup B\in A'$).

ב) בהשתמש בחלק א׳ (או אחרת), הוכח כי לכל סידרה של מספרים ממשיים יש תת-סידרה מונוטונית.

3. (20 נק׳)

נניח כי $a,\, b>0$. בהנתן $x_1>0$, נגדיר סדרה $(x_1,x_2,\dots)$ ע"י

$$x_{n+1}:=\sqrt{\frac{ab^2+x_n^2}{a+1}}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

(i) הוכח כי אם $0<x_1<b$, אזי הסדרה $(x_1,x_2,\dots)$ הינה מונוטונית עולה וקיים הגבול $\lim_{n\to\infty}x_n$.

(ii) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}x_n$ גם כאשר $x_1>b$?

4. (20 נק׳)

א) תהו $a_n > 0$ עבור $n \in \mathbb{N}$. הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$, אזי גם $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{a_n}}{n} < \infty$.

ב) קבע האם כל אחד מהטורים הבאים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר, מתכנס בהחלט או מתכנס בתנאי כאשר:

(i) $b_n = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (ii) $b_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$

5. (20 נק׳)

נניח כי $\varphi : [a, b) \to \mathbb{R}$ רציפה וגזירה פעמיים על (a, b).

הוכח כי אם $\varphi'' > 0$ על (a, b), אזי הפונקציה $\psi : (a, b) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\psi(x) := \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x - a}$ הינה עולה ממש.

6. (20 נק׳)

נניח כי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה ותהיה $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $g(x) := f(x)^2$.

הוכח כי g גזירה בנקודה $Z \in \mathbb{R}$ אמ"ם לפחות אחד מהתנאים הבאים מתקיים:

(i) f גזירה בנקודה $Z \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(Z) = 0$ ו- $\frac{f(Z+h)}{\sqrt{|h|}} \xrightarrow[h \to 0,\ h \neq 0]{} 0$.

בהצלחה!!!