

## חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרופסור יורם הירשפלד

משך הבחינה: שלוש (3) שעות. בחירה: ענה על 4 מ 6 השאלות. עזרים מותרים: מחשבון בסיסי. בהצלחה!

1. נתונה סדרה  $x_n$  המקיימת:  $0 < x_0 < 1$  ולכל  $n$ ,  $x_{n+1} = 1 + x_n^2 - x_n$ .

א. הוכח שלכל  $n$   $0 < x_n < 1$ . ב. הוכח שהסדרה מונוטונית עולה.

ג. לכן הסדרה מתכנסת. חשב את גבולה.

2. תהי  $A$  קבוצה לא ריקה וחסומה של מספרים ממשיים, ותהי  $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$ .

א. הגדר מה פירוש  $d = \sup A$  ו  $e = \inf A$  (8 נקודות)  
 ב. הוכח כי  $A - A$  חסומה מלמעלה, ו  $\sup(A - A) = \sup A - \inf A$ .

3. תהי  $f: R \rightarrow R$  פונקציה מונוטונית עולה (ולכן חד חד ערכית) המוגדרת בכל הישר הממשי ותמונתה כל הישר. הוכח שהפונקציה ההפוכה  $f^{-1}$  רציפה בכל נקודה (הכוונה להוכחה ישירה. אם אתה מעדיף להסתמך על משפטים העוסקים בפונקציה מונוטונית, הוכח אותם קודם).

4. בדוק את הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x + 1|}$  בקטע  $[-4, 4]$ : האם והיכן היא מקבלת מינימום או מקסימום, לוקלי או גלובלי בקטע (השאר  $\sqrt{2}$  בחישובים ולא קירובים עשרוניים שלו).

5. א. הוכח שהפונקציה  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$  גזירה בנקודה 0 וחשב את נגזרתה.

ב. הוכח שהפונקציה גזירה פעמיים בנקודה 0 וחשב את הנגזרת השנייה.

6. א. הצג את הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 3}$  כסכום של שברים חלקיים  $(\frac{A}{x - \alpha} + \frac{B}{x - \beta})$ .

ב. היעזר בהצגה זאת לחישוב פולינום טיילור  $P_4$  (סביב 0) של הפונקציה  $f$ .