

מבחן בחדו"א 1

משך המבחן: שלוש שעות. השימוש בכל חומר עזר אסור, כולל למחשבון.

- יש לענות על בדיוק שאלה אחת מחלק א' ובדיוק שלוש שאלות מחלק ב'.
חלק ג' הוא רשות.
נא לסמן, בעמוד הראשון במחברת הבחינה, אילו שאלות בחרתם.
עליכם לצטט, במדויק, כל משפט מהשיעור או התרגול בו הנכם משתמשים.

שימו לב: בכל סעיף, תשובה לא נכונה תזכה אתכם ב-0 נקודות. תשובה ריקה תזכה אתכם ב-20% משווי הסעיף.

חלק א'

יש לענות על שאלה אחת מבין השתיים הבאות.

שאלה 1: (25 נקודות)

הוכיחו את משפט ערך הביניים הדיפרנציאלי של קושי: תהי
 $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות וגזירות ונתון $g'(x) \neq 0$ לכל
 $a < x < b$. אזי קיים $a < x_0 < b$ כך ש $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

שאלה 2: (25 נקודות)

רשמו את הגדרת הגבול של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0 לפי סדרות (היינה)
ולפי ε, δ (קושי). הוכיחו ששתי ההגדרות הן שקולות.

F-91

חלק ב'

יש לענות על שלוש שאלות מבין הארבע הבאות.

שאלה 3: (25 נקודות)

- (א) (5 נקודות) מהו פולינום טיילור מסדר n של e^{x^2} סביב הנקודה $x_0 = 0$ (אין צורך להוכיח)?
- (ב) (20 נקודות) הוכיחו את אי-השוויון הבא לכל x ממשי:
$$e^x + e^{-x} \leq 2e^{x^2}$$

שאלה 4: (25 נקודות)

נתונה פונקציה $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ונתון $x_0 \in (a, b)$ כך שהפונקציה גזירה בו. וכמו כן נתון ישר $l(x) = cx + d$ העובר בנקודה $(x_0, f(x_0))$. הוכיחו כי אם לכל $x \in (a, b)$ מתקיים $f(x) \geq l(x)$ אזי $c = f'(x_0)$.

שאלה 5: (25 נקודות)

נתונה סדרה a_n , ונתון שהמספרים -5 ו- $+5$ הם גבולות חלקיים של הסדרה. כמו-כן נתון שלכל n מתקיים $|a_{n+1} - a_n| \leq 1/n$. הוכיחו כי המספר 0 הוא גבול חלקי של הסדרה a_n .

שאלה 6: (25 נקודות)

נתונה $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$ כאשר $n > 3$, ונסמן $g(x) = f^{(3)}(x)$ את הנגזרת השלישית של $f(x)$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו ש- $g(x)$ היא פולינום ממעלה $n - 3$.

(ב) (10 נקודות) נתון שכל המספרים a_1, \dots, a_n שונים זה מזה. הוכיחו של- $g(x)$ יש $n - 3$ שורשים שונים.

(ג) (5 נקודות) שלא כמו בסעיף (ב), כעת נתון רק שבין המספרים a_1, \dots, a_n אף מספר לא מופיע יותר מפעמיים. הוכיחו שגם בתנאים אלה, ל- $g(x)$ יש $n - 3$ שורשים שונים.

חלק ג

שאלה 7: (10 נקודות)

(א) (5 נקודות) יהי $\alpha \in \mathbb{Q}$ חתך דדקינד, ונתון $\alpha \geq 0^*$. הגדירו את $-\alpha$ והראו שמה שהגדרתם הוא חתך.

(ב) (5 נקודות) הראו כי $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow -\alpha \leq -\beta$

בהצלחה!