

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1

פרופסור יורם הירשפלד

משך הבחינה: שלוש (3) שעות. בחירה: ענה על 4 מ 6 השאלות.
עזרים מותרים: מחשבון בסיסי. **בהצלחה!**

1. א. הגדר מהי סדרה מתכנסת ומה היא סדרת קושי והוכח שלפי ההגדרה הזאת כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי (10 נקודות)

ב. נתונה סדרה x_n המקיימת: $0 < x_0 < 1$ ולכל n , $x_{n+1} = x_n \cdot (2 - x_n)$. הוכח שהסדרה מתכנסת ו $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ (15 נקודות)

2. תהי f פונקציה המוגדרת על כל הישר. גניח שלכל נקודה x יש $\varepsilon > 0$ עבורו

$$f(x) < f(y) \Leftrightarrow x < y < x + \varepsilon \quad (i) \quad \vee \quad f(y) < f(x) \Leftrightarrow x - \varepsilon < y < x \quad (ii)$$

א. הוכח שהפונקציה עולה מונוטונית (ממש) (18 נקודות) [אפשרות: הנח לצורך סתירה שיש זוג $a < b$ עבורו $f(a) \geq f(b)$ והתבונן ב $\{x \mid f(a) \geq f(x)\}$ $b_0 = \inf$]

ב. הבא דוגמה של פונקציה עבורה מתקיים התנאי (i) והיא אינה מונוטונית (אין צורך להוכיח זאת. 7 נקודות).

3. תהי f פונקציה מונוטונית יורדת בקטע $[a, b]$, כך שתמונת הקטע היא כל הקטע $[f(b), f(a)]$. הוכח שהפונקציה רציפה בקטע.

הוכח שהפונקציה גזירה פעמיים בנקודה 0

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad .4$$

וחשב את $f''(0)$.

5. א. האם קיים הגבול ומה הוא: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}$ (8 נקודות)

ב. הוכח שלכל $-1 < x$ ולכל $0 \leq \alpha$ מתקיים: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha \cdot x$ (17 נקודות)

$$6. \text{ תהי } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- א. האם יש לפונקציה ערך מקסימלי ומינימלי ומה הם? נמק (8 נקודות).
- ב. האם יש לה ישר אסימפטוטי $L(x) = ax + b$ ב ∞ או ב $-\infty$? (5 נקודות)
- ג. מצא את פולינום טיילור P_5 ממעלה 5 של הפונקציה סביב 0 (8 נקודות) והאם ניתן לקבוע שבקטע $[-1, 1]$ הוא מתאר את הפונקציה בטעות שאינה עולה על $\frac{1}{360}$? נמק (4 נקודות)