

ש"ס

F-89

חשבון דפרנציאלי ואנטגרלי 1 (0366-1101-01)

מבחן, מועד ב, סמ' א, תשס"ח, 19/5/08

פרופ' יאהרונסון

הנחיות:

זמן המבחן: שלוש שעות. ענה על שאלה מס' 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא כל שימוש בחומר עזר. הוכח את תשובותיך. סמן את מספרי שאלות עליהן ענית על מחברת מס' I.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

(א) (5 נק') אם $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה, אזי קיים $x \in [0, 1]$ כך ש- $f(x) = 0$.

(ב) (5 נק') $e^{\frac{1}{x^3}} \rightarrow 0$ $x \rightarrow 0, x < 0$.

(ג) (5 נק') אם $I \subset \mathbb{R}$ קטע ו- $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות עולות, אזי $fg: I \rightarrow \mathbb{R}$ הינה פונקציה לא יורדת.

(ד) (5 נק') אם $a_n > 0$ והטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\frac{3}{4}}$ מתכנס גם.

2. (20 נק')

(א) תהי (a_1, a_2, \dots) סידרה חסומה כך ש- $a_n - a_{n+1} \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$. הוכח כי אוסף

גבולות החלקיים של הסידרה הינה קטע.

(ב) מצא את רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$.

3. (20 נק')

(א) הוכח כי הטור $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ מתכנס עבור $x \in (-1, 1)$.

(ב) הוכח כי $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ עבור $x \in (-1, 1)$.

(ג) הוכח כי $\log 2 = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{9^k}$ עבור $T \in \mathbb{N}$.

4. (20 נק')

יהי $f(x) := \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1}$ עבור $x > 0, x \neq 1$.

(א) מצא $f(1)$ כך ש- f תהיה רציפה ב-1.

(ב) האם f (כפי שמוגדר בסעיף א) תהיה גזירה ב-1?

5. (20 נק')

(א) הוכח כי אם $0 < x < 1$, אזי $x < x\sqrt{2-x} < 1$.

עבור $x \in \mathbb{R}_+$, נגדיר את הסידרה $a_1(x), a_2(x), \dots$ ע"י $a_1(x) = x$ ו-

$$a_{n+1}(x) := a_n(x)\sqrt{2-a_n(x)}$$

(ב) יהיה $x \in (0, 1)$. הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(x)$ והשב אותו.

(ג) האם קיים הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(\frac{4}{3}) \in \mathbb{R}$?

6. (20 נק')

הוכח כי קיימים 3 פיתרונות ממשיים בדיוק למשוואה $(\ln|x|)^3 = x$.

בהצלחה!!!