F - 88

חשבון דפרנציאלי ואנטגרלי 1 (0366-1101-01)

מבחן, מועד א, סמ׳ א, תשס״ח, 1/4/08

פרופ׳ י.אהרונסון

הנחיות:

זמן המבחן: שלש שעות. ענה על שאלה מס׳ 1 ועל עוד ארבע שאלות בלבד ללא כל שימוש בחומר עזר. הוכח את תשובותיך. סמן את מספרי שאלות עליהן ענית על מחברת מס׳ I.

1. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א) (5 נק׳) קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש- $e^x + x^3 + \sin x = 0$.

ב) (5 נק׳) $(1+\frac{1}{n^2})^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

ג) (5 נק׳) אם $a_n \in \mathbb{R}$ עבור $n \geq 1$ ו-$a_n^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ אזי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n$.

ד) (5 נק׳) אם $a,\ b > 0$, אזי $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \longrightarrow a+b$ כאשר $n \to \infty$.

2. (20 נק׳)

א) מצא $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x - x}{e^x - 1 - x}$.

ב) מצא $\lim_{n\to\infty} (\cos \frac{x}{\sqrt{n}})^n$.

3. (20 נק׳)

א) הוכח כי אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אזי לכל $N \geq 1$ גם אם הטור $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ מתכנס ו- $\sum_{k=N}^{\infty} a_k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

ב) האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} (\frac{1}{3})^n$ מתכנס?

4. (20 נק׳)

א) הוכח כי קיימים $a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{R}$ ו- $r > 0$ כך שהטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס כאשר $|x| < r$ וכך ש- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \arctan x$ לכל $|x| < r$.

ב) בעזרת סעיף א) (או אחרת) הוכח כי

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \frac{1}{3^n}.$$

5.(20 נק׳)

א) הוכח כי אם $x > 1$, אזי $1 < \frac{1}{2}(x + \frac{1}{x}) < x$.

עבור $x > 0$, נגדיר את הסידרה $a_1(x), a_2(x), \ldots$ ע״י $a_1(x) = x$ ו- $a_{n+1}(x) := \frac{1}{2}(a_n(x) + \frac{1}{a_n(x)})$.

ב) יהיה $x > 1$. הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$ והשב אותו.

ג) האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{3}{4})$?

6. (20 נק׳)

נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות, שמקיימת $f(1)>f(0)+1$ ו-$f'(0)=f'(1)=1$.

א) הוכח כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש-$f'(c)>1$.

ב) הוכח כי קיימות $0<d_1<d_2<1$ כך ש-$f''(d_1)>0>f''(d_2)$.

ג) האם קיים נקודה $p\in(0,1)$ עם $f''(p)=0$?

בהצלחה!!!

סטי' 56 ספרות: 1,2,3,5,6

87

מחברת מס' ____

מתוך ____ מחברות

אוניברסיטת תל-אביב TEL AVIV UNIVERSITY

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נועדו לשני המינים)

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

תאריך הבחינה 01/04/02

שם הקורס תכנות 1

שם המורה אהרונסון

החוג/המגמה אתנלקר

1. הנך נדרש לשמור על טוהר הבחינה ועל עבודה עצמית ולהישמע להוראות המשגיחים ולנוהלי האוניברסיטה. אין להעתיק, אין לדבר ואין להעביר חומר בין הנבחנים.

נבחן הנוהג בניגוד להוראות צפוי להפסקת בחינתו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן להבחן בחדר שבו הוא רשום.
3. אין להחזיק **טלפונים ניידים** או אמצעי תקשורת ומכשירים אלקטרוניים כלשהם בזמן הבחינה. על הנבחן להניח את כל חפציו האישיים בצד החדר הרחק ממקום מושבו.
4. אין להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה או לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
5. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות מהמשגיח.
6. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא את חדר הבחינה בטרם סיים את הבחינה ללא קבלת רשות מהמשגיח. בעת יציאה מן החדר, יפקיד הנבחן את מחברות הבחינה והשאלון (טופס הבחינה) בידי המשגיח.
7. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון לידיו, לא יהא רשאי לעזוב אותו אלא כעבור חצי שעה לפחות ממועד תחילתה ורק לאחר שיחזיר למשגיח את המחברת **ואת השאלון**, ויקבל ממנו את התעודה המזהה שאותה מסר עם כניסתו לכיתה. נבחן שהחליט לעזוב בלי לכתוב את הבחינה ייחשב כמי שנבחן במועד זה וציונו יהיה "0".
8. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת. פרטי הנבחן ימולאו על כריכת המחברת במקום המיועד לכך בלבד.
9. אין לתלוש דפים מהמחברת. טיוטה תיכתב בתוך המחברת בלבד. אין להשתמש בדפים שהביא הנבחן.
10. יש לכתוב את התשובות בעט כחול או שחור, בכתב יד ברור ונקי. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברת והשאלון ויקבל מיד המשגיח את התעודה המזהה.
11. **אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.**

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן: 94

הציון 98

המחברת נבדקה ביום ____

חתימת המורה ____

92+2

120463

5 20/20

3 15/20

2 17/20

6 20/20

F-88

ת"ז: 86 שאלות: 1,2,3,5,6.

1. א. $e^x+x^3+\sin x=0$ קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש-

נסמן $f(x)=e^x+x^3+\sin x$ ונוכיח:

$\lim_{x\to\infty} e^x+x^3+\sin x=\infty \rightarrow$ קיימת נק' $c\in[0,\infty)$ המקיימת $f(c)>0$

$\lim_{x\to-\infty} e^x+x^3+\sin x=0-\infty \rightarrow$ קיימת נק' $d\in(-\infty,0]$ המקיימת $f(d)<0$

עפ"י משפט ערך הביניים - פונקציה רציפה ($f(x)$

הינה פונקציה רציפה כיוון שהיא חיבור של פונקציות רציפות)

ב-$[d,c]$ מקיימת שלכל $f(d)<y<f(c)$ (בהנחה בה"כ ש-

$f(d)<f(c)$ - במקרה שלנו זה אכן מתקיים כיוון

ש-$f(c)>0$ ו-$f(d)<0$) קיימת נק' $d<x<c$ כך ש-$f(x)=y$.

ובמקרה שלנו - $f(d)<0<f(c) \Rightarrow$ קיימת נק' a: $f(a)=0$.

ב. $(1+\frac{1}{n^2})^n \xrightarrow[n\to\infty]{?} 1$:

הוכחה: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^{n^2\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}$

ניתן לכתוב את המעבר כיוון ש- $0<(1+\frac{1}{n^2})^{n^2\cdot\frac{1}{n}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}{n}=0.$

$\Rightarrow \lim e^{\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}=e^{\lim\frac{1}{n}\cdot\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}=e^0=1$ פונק' e^x רציפה:

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n^2})^n\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

ג. אם $a_n\in\mathbb{R}$ עבור $n\geq1$ ו- $a_n^2\to1$ אז קיים הגבול - $\lim_{n\to\infty}a_n$. ← טענה לא נכונה.

הפרכה: ניקח דוגמא נגדית את הסדרה: $a_n=(-1)^n$. $\Leftarrow$ אין לה גבול (יש לה 2 גבולות חלקיים - $\{-1,1\}$). אבל $a_n^2=(-1)^{2n}=1$. ← קיים הגבול 1. (כש- $n\to\infty$).

ד. אם $a,b>0$, אז $(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}\to a+b$ כאשר $n\to\infty$.

טענה לא נכונה.

נוכל להניח

בה"כ כי $a\geq b$. ואז:

שוב- $0<(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}}$ לכל n טבעי ולכן המעבר תקין.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=$

$\lim e^{\frac{1}{n}\ln(a^n+b^n)}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(a^n+b^n)}{n}\overset{L}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a^n+b^n}\cdot(a^n\ln a+b^n\ln b)}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\ln a+b^n\ln b}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a^n\ln a}{b^n}+\ln b}{\frac{a^n}{b^n}+1}=$

$\frac{\infty}{\infty}$ - לכן ניתן להשתמש בלופיטל.

(פונק' רציפה וגזירה וגזירות ב-R)

טיוטה

$(1+\frac{1}{n^2})^n = (1+\frac{1}{n^2})^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = e$

$\frac{\ln(1+\frac{1}{n^2})^{n^2}}{n} \to 0$

$\lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(a^n+b^n)}$

$\frac{\ln(a^n+b^n)}{n}$

$\frac{a^n\ln a+b^n\ln b}{a^n+b^n}$

$\frac{-1-x}{e^x-1-x} \le \frac{\sin x - x}{e^x-1-x} \le \frac{1-x}{e^x-1-x}$

$(\frac{e^x}{-1-x}+1)^{-1}$

$S_n = \sum a_k \quad S_n \to L$

$L-M < S_n < L+M$

$\frac{3n!}{n!\,(2n)!}\cdot\frac{1}{3^n}$

$\sqrt[n]{\frac{(2n+1)(2n+2)\cdots(3n)}{1\cdot 2\cdots n}}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{2n}{1}\cdot\frac{2n}{2}\cdots\frac{2n}{n} = \frac{2n^n}{n!} = \frac{2n}{\sqrt[n]{n!}}$

$1 \le \sqrt[n]{n!} \le \sqrt[n]{n^n} = n$

$\frac{2n+1}{1}\cdot\frac{2n+2}{3\cdot 2}\cdots\frac{3n}{3n}$

$\sqrt[n]{\frac{2n}{3}} = \frac{\sqrt[n]{2n}}{\sqrt[n]{3}} = 1$

$\frac{(3n+3)!}{(n+1)!\,(2n+2)!}\cdot\frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!\,(2n+2)!}{3n!}\cdot 3^n$

$\frac{(3n+2)(3n+1)(3n+3)}{(n+1)(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{1}{3}$

$\frac{2n+1}{3}\cdot\frac{2n+2}{3\cdot 2}\cdot\frac{2n+3}{3\cdot 3}\cdots\frac{3n}{3n}$

$f'(c) = \frac{f'(c)-f'(0)}{c-0} > \frac{1-1}{c} > 0$

$f'(c) = \frac{f(1)-f'(c)}{1-c} < 0$

$\cos'(\frac{x}{\sqrt{n}}) = -\sin\frac{x}{\sqrt{n}}$

$\frac{3n+1}{2n+1} \ge \frac{2}{3} \Rightarrow 6n+2 \ge 6n+3$

$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{(3n+1)}{2n+1}\cdot\frac{3n+2}{n+1} = \frac{9n^2+\dots+3}{2n^2+\dots+1} = 3\cdot\frac{3n^2+3n+1}{2n^2+3n+1}$

$\frac{9n^2+9n+2}{4n^2+6n+2} > 1\frac{1}{2}$

$9n^2+9n+2 > 6n^2+9n+3$

$3n^2 > 1$

$1 < \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) < x$

$2 < x+\frac{1}{x} < 2x$

$2x < x^2+1 < 2x^2$

$0 < x^2-2x+1 \quad 0 < x^2-1$

$0 < (x-1)^2 \quad x^2 > 1$

$f(x) = \ln x \quad f' = \frac{1}{x}$

$f'(c) = \frac{\ln x - \ln 1}{x-1} = \frac{\ln x}{x-1}$

$\frac{1}{x} < \frac{1}{c} < 1$

$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1$

$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$

$(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n$

$\cos\frac{x}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \cos 0 = 1$

$-\frac{\sin x - x}{e^x-1-x} = \frac{\frac{\sin x}{e^x}-\frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}-\frac{x}{e^x}} \to 0$

$0 \leftarrow \frac{-1}{e^x} \le \frac{\sin x}{e^x} \le \frac{1}{e^x} \to 0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x} \to 0$

$a_1 = \frac{3}{4}$

$a_2 = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{12} = \frac{25}{24} > 1$

$a_3 = \frac{1}{2}(\frac{25}{24}+\frac{24}{25}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{25^2+24^2}{25\cdot 24}$

$x = \frac{3}{4} \quad \cos x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\dots$

$1 < \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) < x$

$(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n = (1+(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1))^{n\cdot\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\cdot(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)}$

$\lim_{n\to\infty}(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n$

$\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n}}$

$n\cdot(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1) =$

$\frac{-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot\frac{-x\cdot\frac{1}{2\sqrt{n^3}}}{n}}{-\frac{1}{n^2}} =$

$\frac{\frac{-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}(-x)}{2\sqrt{n}\cdot n}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot x\cdot\sqrt{n}}{2} = -\infty$

$\Rightarrow e^{-\infty} = 1.$

$(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n$

$(1+(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1))^{\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\cdot n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)} \to e$

$n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)$

$\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n}} \stackrel{L}{=} \frac{\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

$\frac{-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot\frac{x\frac{1}{2}\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = -\sin\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$

$\Rightarrow e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{x}{2}}$

$(n^{-1})' = -n^{-2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{a}{b})^n\cdot\ln a+\ln b}{(\frac{a}{b})^n+1}\ \xrightarrow[n\to\infty]{a=b}\ \frac{\ln a+\ln b}{2}=\frac{\ln b+\ln b}{2}=\ln b.$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{a<b}\ \frac{\ln b}{1}=\ln b.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a^n+b^n)^{\frac1n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac1n\ln(a^n+b^n)}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac1n\cdot\ln(a^n+b^n)}=e^{\ln b}=b.$$

עפ"י נתון $a>0$ ← $b\geq a \Rightarrow (a^n+b^n)^{\frac1n}\xrightarrow[n\to\infty]{} b \neq a+b$

עפ"י נתון $b>0$ ← $b<a \Rightarrow (a^n+b^n)^{\frac1n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{אז}} a \neq a+b$

3

3. הוכח כי אם הטור $\sum_{k=1}^{n} a_k$ מתכנס אז לכל $N\geq 1$ גם הטור $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ מתכנס ו- $\sum_{k=N}^{\infty}a_k\xrightarrow[N\to\infty]{}0$!

עיין לעיל!

מאחר שהטור מתכנס נניח שהוא $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=L$. לכל $N\geq1$ מתקיים: $\sum_{k=N}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=1}^{N-1}a_k=L-\sum_{k=1}^{N-1}a_k$.

נסמן $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$. הסדרה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ל-L) לכן היא חסומה.

כלומר, קיים $M\in\mathbb{R}$ כך ש- $\forall n\in\mathbb{N}: -M\le S_n\le M$.

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty}a_k=L-\sum_{k=1}^{N-1}a_k=L-S_{N-1}\le L+M.$$

⇐ אם נסמן $T_n=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$ נקבל כי $\forall n\in\mathbb{N}\ T_n\le L+M$

וגם: $\sum_{k=N}^{\infty}a_k=L-\sum_{k=1}^{N-1}a_k=L-S_{N-1}\ge L-M$

-5

⇐ כלומר: $(\forall n\in\mathbb{N})\ L-M\le T_n\le L+M$ סדרה T_n חסומה

⇐ $T_n\not\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ (⇐) $\forall n\in\mathbb{N}: T_n=R\in\mathbb{R}$ ← סדרה סופית מתכנסת

$$\sum_{k=N}^{\infty}a_k=\sum_{k=1}^{\infty}a_k-\sum_{k=1}^{N-1}a_k\xrightarrow[N\to\infty]{}L-L=0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N}^{\infty}a_k\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

ד. $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3n}{n}\left(\frac13\right)^n$:

נבדוק את מבחן המנה:

$$\frac{(3n+3)!}{(2n+2)!\,(n+1)!}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{n!\,2n!}{3n!}\cdot3^n=$$

$$\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(2n+1)(2n+2)(n+1)\cdot3}=\frac{(3n+1)(3n+2)}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{9n^2+6n+3n+2}{4n^2+4n+2n+2}=\frac{9n^2+9n+2}{4n^2+6n+2}\geq1\tfrac12$$

נראה שמתקיים לכל $n\geq1$.

$$9n^2+9n+2\geq6n^2+9n+3$$
$$\Updownarrow$$
$$3n^2\geq1\quad\checkmark\quad\Rightarrow$$

הטור ~~מתכנס~~ מתבדר.

$(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n = [1+(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)]^{\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}\cdot n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1)}$

Gro

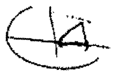
$n(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1) = \frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}-1}{\frac{1}{n}} \overset{L}{=} \frac{-\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot\frac{-\frac{1}{2\sqrt{n^3}}}{1}}{-\frac{1}{n^2}} = \frac{-\frac{\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{2\sqrt{n}\cdot n}}{n^2} = \frac{\sin\frac{x}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}}{2} \to \infty$

$\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{n+1}}}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}} \to 1$ $= 1$

$|(\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n - 1| < \varepsilon$

$1-\varepsilon < (\cos\frac{x}{\sqrt{n}})^n < \varepsilon+1$

$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} < \cos\frac{x}{\sqrt{n}} < (\varepsilon+1)^{\frac{1}{n}}$



אוניברסיטת תל-אביב

אוניברסיטת תל-אביב

~~[illegible]~~

6. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים ברציפות,
שמקיימת $f(1) > f(0)+1$ ו- $f'(0)=f'(1)=1$.

א. הוכח כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש- $f'(c)>1$.

פת': לגרנז'. הפונקציה רציפה ב- $[0,1]$ וגזירה
ב- $(0,1)$ קיימת נק' $c\in(0,1)$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} > \frac{f(0)+1-f(0)}{1} = 1 \Rightarrow \boxed{f'(c)>1}$$

ב. הוכח כי קיימות $0<d_1<d_2<1$ כך ש- $f''(d_1)>0>f''(d_2)$.

נשתמש בלגרנז' שוב. הפונק' רציפה ב- $[0,c]$ וגזירה
ב- $(0,c)$ לכן קיימת נק' $d_1\in(0,c)$ כך ש-

(גזירה פעמיים ברציפות)

$$f''(d_1)=\frac{\overbrace{f'(c)-f'(0)}^{>1-1=0}}{\underbrace{c-0}_{>0}} > 0 \quad \Rightarrow f''(d_1)>0$$

הפונק' רציפה ב- $[c,1]$ וגזירה ב- $(c,1)$ לכן
קיימת נק' $d_2\in(c,1)$ כך ש-

$$f''(d_2)=\frac{\overbrace{f'(1)-f'(c)}^{<1-1=0}}{\underbrace{1-c}_{>0}} < 0 \quad \Rightarrow f''(d_2)<0$$

נשים לב כי מתקיים- $0<d_1<d_2<1$ מאחר ש-
$d_1\in(0,c)$, $d_2\in(c,1)$. והם מקיימים: $f''(d_1)>0>f''(d_2)$.

ג. מאחר שהפונק' גזירה פעמיים ברציפות נקבל
ממשפט ערך הביניים שקיימת נק' $d_1<p<d_2$
כך ש- $f''(p)=0$ (כיוון ש- $f''(x)$ רציפה ו- $f''(d_1)>0$ ו-
$f''(d_2)<0$).

גם פת': ממשפט Rolle נקבל כי קיימת נק' $p\in(0,1)$
כך ש- $f''(p)=0$ (מאחר ש- $f'(x)$ רציפה ב- $[0,1]$,
גזירה ב- $(0,1)$ ומתקיים- $f'(0)=f'(1)=1$).

5. א. הוכח כי אם $1<x$ אז $1<\frac{1}{2}(x+\frac{1}{x})<x$.

$2x < x^2+1 < 2x^2$ ← כ"א נכפיל ב-x כי x>1

$2x < x^2+1 \iff 0 < x^2-2x+1 \iff 0 < (x-1)^2$ מתקיים לכל $x>1$.

$2x^2 > x^2+1 \iff 0 < x^2-1 \iff x^2>1$ ← מתקיים לכל $x>1$

⇐ הא"ש שוויון מתקיים לכל $x>1$.

עבור $x>0$ נגדיר את הסדרה $a_1(x), a_2(x), \dots$ ע"י $a_1(x)=x$ ו- $a_{n+1}(x)=\frac{1}{2}(a_n(x)+\frac{1}{a_n(x)})$.

ב. יהי $x>1$ הוכח כי קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(x)$

נראה כי הסדרה מונוטונית יורדת, וחסומה.

נראה באינדוקציה. $n=2$: $1 \overset{\text{סע' א'}}{<} a_2(x) = \frac{1}{2}(a_1(x)+\frac{1}{a_1(x)}) = \frac{1}{2}(x+\frac{1}{x}) \overset{\text{סע' א'}}{<} x$

$1 \overset{\text{סע' א'}}{<} a_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(a_n(x)+\frac{1}{a_n(x)}) = \frac{1}{2}a_n(x)+\frac{1}{2a_n(x)} \le \frac{1}{2}a_n(x) \le a_n(x)$ (מהנ"א $1<a_n(x)$)

⇐ לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $1<a_{n+1}(x)<a_n(x)$ ⇐ סדרה מונוטונית יורדת וחסומה ⇐ קיים גבול. נסמן $a_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} L$

וכן: $a_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(a_n(x)+\frac{1}{a_n(x)})$

$L = \frac{1}{2}(L+\frac{1}{L}) \Rightarrow 2L^2 = L^2+1 \Rightarrow L^2=1 \Rightarrow L=\pm1$

אבל הוכחנו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $a_n(x)>1$.

לסיכום ⇐ $L=1$ - הגבול של $a_n(x)$ כש- $n\to\infty$.

ג. האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{3}{4})$?

⇐ אז - $a_1(\frac{3}{4})=\frac{3}{4}$ ו- $a_2(\frac{3}{4}) = \frac{1}{2}(a_1(\frac{3}{4})+\frac{1}{a_1(\frac{3}{4})}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{4}+\frac{4}{3}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{9+16}{12} = \frac{25}{24} > 1$.

הוכחנו בסעיף ב' כי לכל $x>1$ מתקיים:

$\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 1$, ובפרט ל- $\frac{25}{24} > 1$ מתקיים כי:

$\lim_{n\to\infty} a_n(\frac{25}{24}) = 1$ ⇐ יהי $\varepsilon > 0$ אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n(\frac{25}{24}) - 1| < \varepsilon$ אבל $a_n(\frac{25}{24}) = a_{n+1}(\frac{3}{4})$.

סה"כ: $|a_{n+1}(\frac{3}{4}) - 1| < \varepsilon$ לכל $n > N$

⇐ $\forall n > N+1 : |a_n(\frac{3}{4}) - 1| < \varepsilon$

⇐ $a_n(\frac{3}{4}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

2. א. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x - x}{e^x-1-x}$:

$$0 \xleftarrow[x\to\infty]{} -\frac{1}{e^x} \le \frac{\sin x}{e^x} \le \frac{1}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 .$$ $(-1 \le \sin x \le 1)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x} \overset{\ell}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x} = 0 .$$

$\frac{\infty}{\infty}$ אם ניתן להפעיל לופיטל (פולינ' בצירוף, רציף וגזיר בקטע)

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x - x}{e^x-1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sin x}{e^x} - \frac{x}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}-\frac{x}{e^x}} = \frac{0}{1} = 0 .$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x - x}{e^x-1-x} = 0}$$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt n}-1}\cdot n\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}-1\right)}$$

כפל (ניתן ע"פ אריתמטיקה של גבולות):

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}-1\right)\right]^{\frac{1}{\cos\frac{x}{\sqrt n}-1}} = e .$$

$f(n)=\cos\frac{x}{\sqrt n}-1$ כש- $n\to\infty$: $f(x)\to 0 \Rightarrow e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+f(n))^{\frac{1}{f(n)}}$.

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt n}-1}{\frac1n} \overset{\ell}{=} \frac{-\sin\frac{x}{\sqrt n}\cdot\frac{-x\cdot\frac{1}{2\sqrt n}}{n}}{-\frac{1}{n^2}} =$$

$\cos\frac{x}{\sqrt n}\xrightarrow[n\to\infty]{}1 \Rightarrow \cos\frac{x}{\sqrt n}-1\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\frac1n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow \frac00$ כש הפונק' רציפות, גזירות ומוגדרות ב-0, ו- $\frac1n \neq 0$ בסביבה של 0 לכן ניתן להפעיל לופיטל.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-\sin\frac{x}{\sqrt n}\cdot\frac{x}{2n\sqrt n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} -\sin\frac{x}{\sqrt n}\cdot\frac12\cdot\sqrt n \; \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{\sqrt n}}{\frac{2}{\sqrt n}} \overset{\ell}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt n}\cdot\frac{-x}{2n\sqrt n}}{2\cdot\frac{1}{n^{3/2}}\left(-\frac12\right)} =$$

$\frac00$ - שוב ניתן להפעיל לופיטל כיון שהפונק' רציפות, גזירות ומוגדרות ב-0. ו- $\frac{2}{\sqrt n}\neq 0$ בסביבה של 0.

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x\cos\frac{x}{\sqrt n}}{2n\sqrt n}\cdot n\sqrt n = \lim_{n\to\infty} x\cos\frac{x}{\sqrt n} = -x .$$ $\cos 0 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{\sqrt n}\right)^n = e^{-x} = \frac{1}{e^x}.}$$

שגיאה
חישוב

-2

מדוע מותר להפעיל לופיטל על סדרה?

-1