0366-1101

סמסטר ב' תשס"ז - מועד ב'
מועד הבחינה: 09.09.07

מבחן בקורס "חדו"א 1"

ד"ר יולי אידלמן

הנחיות

יש לענות על שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'
אין לערבב סעיפים משאלות שונות
יש לרשום בעמוד הראשון את מספרי השאלות שפתרתם
במידה ויענו על יותר מארבע שאלות, יבדקו השאלות הראשונות בלבד
אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבון
משך הבחינה 3.5 שעות

ב ה צ ל ח ה!

חלק א'

שאלה 1

הוכח את משפט לייבניץ:

אם סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n > 0$ מונוטונית יורדת ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אז:

א. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס.

ב. הסכום S של הטור מקיים $0 \le S \le a_1$.

ג. השארית של הטור מקיימת $|r_n| \le a_{n+1}$.

שאלה 2

נניח $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ (במובן הצר). הוכח כי

א. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$.

ב. אם $B \neq 0$ אז $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.

F-85

חלק ב'

שאלה 3

א. תהי $f:\left[0,\frac{1}{2}\right]\to\mathbb{R}$ גזירה המקיימת $|f'(x)|\le|f(x)|$ ו-$f(0)=0$ הוכח כי $f(x)=0$ לכל $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

ב. הוכח $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$.

שאלה 4

א. נניח $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה המקיימת $f'(x)>x$. הוכח כי f אינה רציפה במ"ש בקטע $(0,\infty)$.

רמז – להוכיח תחילה כי לכל $y>x>0$ מתקיים $f(y)-f(x)\ge(y-x)x$.

ב. הוכח כי לכל $x>-1$: $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$

שאלה 5

תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ גזירה שלוש פעמים. נניח $f(0)=0$ ו-$f(x)\ge0$ לכל $x\in[-1,1]$. הוכח כי קיים $M>0$ כך ש-$f(x)\le Mx^2$. רמז: השתמש בנוסחת טיילור

שאלה 6

תהי $\{a_n\}$ סדרה ונסמן $A=\{a\mid\exists a_{n_j}\to a\}$. נניח a_0 נקודת הצטברות של A, ז"א קיימת סדרה $\{x_n\}\subseteq A$ כך ש-$x_n\to a_0$. הוכח כי $a_0\in A$.