0366-1101

30.1.2007 | סמסטר א - מועד א | י"א שבט תשס"ז

מבחן בחדו"א 1

מרצים: שירי ארטשטיין ופאול בירן

הנחיות:

- יש לענות על שאלה **אחת** מחלק א ו**שלוש** שאלות מחלק ב. אין לערבב סעיפים משאלות שונות!
- יש לרשום בעמוד הראשון את מספרי השאלות שפתרתם.
- משך הבחינה $3\frac{1}{2}$ שעות.
- אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבון.
- השאלות מנוסחות בלשון זכר ונקבה אך מיועדות לשני המינים גם יחד.

חלק א

יש לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות.

שאלה 1: הוכיחי את קריטריון קושי להתכנסות סדרות: הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (במובן הצר) אם ורק אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל זוג אינדקסים $m,n \geq N$ מתקיים $|a_m - a_n| < \epsilon$.

שאלה 2: (שקילות הגדרת הגבול באמצעות ϵ, δ וההגדרה לפי סדרות)
יהיו $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ ו $l \in \mathbb{R}$.
הוכח כי שתי הטענות הבאות שקולות:

1. לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שעבור x המקיים $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x) - l| < \epsilon$.
2. לכל סדרה $x_n \in (a,b)$ המקיימת $x_n \neq x_0$ לכל n וכן $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

חלק ב

יש לענות על שלוש מבין ארבע השאלות הבאות.

שאלה 3:

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. לכל $a \leq t \leq b$ נגדיר

$$M(t) = \sup_{a \leq x \leq t} f(x)$$

הוכח כי M פונקציה רציפה ב־ $[a,b]$.

F-83

שאלה 4:

א. תהי $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה ותהי $x_0 \in (a,b)$. נתונות סדרה עולה ממש $\{x_n\}$ וסדרה יורדת ממש $\{y_n\}$ כך ש $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$.
הוכיחו כי אם $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$, אז f רציפה ב x_0.

ב. הראי כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\ln(1+x^2) \leq x \arctan x$.

שאלה 5:

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע $(a,b]$. הוכיחי: f רציפה במידה שווה בקטע $(a,b]$ אם ורק אם $\lim_{x\to a^+} f(x)$ קיים וסופי.

ב. בדוק האם $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{\ln(1+\sqrt{x})}}$ רציפה במידה שווה בקטע $(0,1)$. הוכח את טענתך.

שאלה 6:

א. תהי $f\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ רציפה. נתון שלכל $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ מתקיים $f(x) \neq \tan x$.
הוכח כי $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \infty$ או $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

ב. הראי כי לכל $x > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} < e^x$$

בהצלחה!