0366-1101

סמסטר ב' תשס"ז - מועד א'
מועד הבחינה: 13.07.07

# מבחן בקורס "חדו"א 1"

ד"ר יולי אידלמן

**הנחיות**

יש לענות על שאלה אחת מחלק א' ושלוש שאלות מחלק ב'
אין לערבב סעיפים משאלות שונות
יש לרשום בעמוד הראשון את מספרי השאלות שפתרתם
במידה ויענו על יותר מארבע שאלות, יבדקו השאלות הראשונות בלבד
אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבון
משך הבחינה 3.5 שעות

**ב ה צ ל ח ה!**

## חלק א'

### שאלה 1

הוכח את הלמה של בורל:

אם קטע סגור $J=[a,b]$ מכוסה ע"י מערכת אינסופית של אינטרוולים פתוחים $S=\{I\}$, אז קיימת מערכת חלקית סופית של $S$ שמכסה את $J$.

### שאלה 2

הוכח את משפט טיילור:

תהי $f$ פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x=a$, ותהי $x$ נקודה כלשהי בסביבה. אזי קיימת נקודה $c$ בין $a$ ו- $x$ כך ש- $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ כאשר

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

7-84

## חלק ב'

### שאלה 3

א. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונניח כי קיימת נקודה $x_0$ כך ש- $f\left(f\left(x_0\right)\right)=x_0$. הוכיחו כי קיימת ל- $f$ נקודת שבת, ז"א קיימת $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $f\left(c\right)=c$.

ב. הוכח או הפרך:

i. אם $f$ גזירה ב- $x_0$ אז קיים $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}$.

ii. אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}$ אז $f$ גזירה ב- $x_0$.

### שאלה 4

א. נניח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה, וקיים קבוע $c>0$ כך ש- $f'\left(x\right)>c$ לכל $x$ בקטע $\left(a,\infty\right)$. הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$.

ב. נניח $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים וחסומה, ונניח כי $f$ מקבלת מינימום ב- $x_0$. הוכח כי קיימת נקודה $c\in\mathbb{R}$ כך ש- $f''\left(c\right)=0$.

(מותר להשתמש בסעיף א' גם אם לא הוכח).

### שאלה 5

א. תהי $\left\{a_n\right\}$ סדרה המקיימת $0<a\le a_n\le b<\infty$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

i. הוכח $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n}$.

ii. הוכח $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\frac{1}{a_n}\ge 1$ ושוויון מתקיים אם ורק אם $a_n$ מתכנסת.

ב. הוכח כי הפונקציה $f\left(x\right)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ רציפה במ"ש ב- $\left(0,1\right]$.

## שאלה 6

א. הוכח את אי השוויונים

$$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \le \sin x \le x$$

ב. נתונה הסדרה הבאה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \end{cases}$$

הוכח כי $a_n$ אינה חסומה.