

10.3.2006
מיזר 3 ל, סמסכא
תס"ו

מיבתן בקצול"ו
מכזה: פאלו ביקן

- * משק הבחינה: 3 1/2 שעות.
- * חומר סגור, למטה מחשבון.
- * יש לפתור שאלה אחת מתוך אלו אחת שאלות מתוך אלו אחת שאלות סדריים ושאלות שונות.

בהצלחה !!!

חלק א'

יש לפתור את שאלה אחת מתוך שתי השאלות הבאות:

1. (25 נק.) הוכח/אי הוכח את הקטכיזון הבא של Cauchy להתכנסות סדרות.
 יהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת: לכל $\epsilon > 0$, קיים N כך שלכל $n, m \geq N$
 מתקיים $|a_n - a_m| < \epsilon$. אזי $\{a_n\}$ מתכנסת (במילוי הדבר).

2. (25 נק.) יהי I קטע פתוח! $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנק. $x_0 \in I$
 נתון $f'(x_0) = 0$ ויש אינפימום בנק. x_0 בוחן/י ϵ .

חלק ב'

יש לפתור את שתי שאלות אלו. השאלות הבאות:

3. (סה"כ 25 נק.)

א. (15 נק.) יהי I קטע פתוח! $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה 10 פעמים בנק. $x_0 \in I$
 נתון $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(9)}(x_0) = 0$ ו- $f^{(10)}(x_0) > 0$. הוכח/אי שיש $\delta > 0$
 כך f יוצרת מינימום בקטע $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ או מקסימום בקטע $[x_0, x_0 + \delta]$.

ב. (10 נק.) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right)$ נען/אינען

F-80

4. (סעיף 25 נק.)

א. (15 נק.) תהי $\{a_n\}$ סידרה המקיימת: $n \in \mathbb{N} \forall a_n > 0$! $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$
הוכחי שהסידרה $\{a_n\}$ מתכנסת אל- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

ב. (10 נק.) יהי $x_0 \in \mathbb{R}$. נגזיר סידרה $\{\alpha_n\}$ ע"י
$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k \cdot x_0)}{2^k}$$

האם הסידרה $\{\alpha_n\}$ מתכנסת? הוכחי את תשובתך.

5. (סעיף 25 נק.)

א. (15 נק.) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונק' כזויה נתון ע- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$! $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
עזרים קיימים לופיים. הוכחי ע- f כזויה גם ב- \mathbb{R} .

ב. (10 נק.) תהי $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ פונק' זוויה נתון ע- $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty$
הוכחי ע- f אננה כזויה גם ב- $[a, \infty)$.

6. (סעיף 25 נק.) תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונק' כזויה

א. (15 נק.) נתון ע- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ $l \in \mathbb{R}$ האם

הוכחי ע- f מקבלת מינימלם או מקסימלם ב- \mathbb{R} .

ב. (10 נק.) האם המסקנה ב- א' עדיין מתקיימת אם במקום קבצים

ע- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ מניחים רק ע- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$! $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
קיימים לופיים (אך קלא בולקא שלים זה קלבה) ?
הוכחי את תשובתך.

בהצלחה !!!