0366-1101

7.2.2006
מועד א', סמסטר א'
תשס"ו

(1)

# מבחן בחדו"א 1.
מרצה: פאול ביקן.

* משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות
* חומר סגור, ללא מחשבון.
* יש לפתור שאלה אחת מחלק א', ושלוש שאלות מחלק ב' (אין לערבב סעיפים משאלות שונות).

בהצלחה !!!

---

## חלק א'

יש לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות הבאות:

1. (25 נק.) הוכח/י את הקריטריון הבא של Cauchy להתכנסות סדרות.
תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת: לכל $\varepsilon>0$, קיים $N$ כך שלכל $n,m\geq N$ מתקיים $|a_n-a_m|<\varepsilon$. אזי $\{a_n\}$ מתכנסת (במובן הצר).

2. (25 נק.) הוכח/י את משפט ערך הביניים הבא:
תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונק' רציפה. נניח ש- $f(a)<0$, $f(b)>0$.
אזי קיים $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=0$.

## חלק ב'

יש לענות על שלוש מבין ארבע השאלות הבאות:

3. (סה"כ 25 נק.)
א. (10 נק.) חשב/י $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

ב. (15 נק.) תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $a_n\geq 0$ לכל $n$.
נתון ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$. הוכח/י ש- $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

F-79

4. (סה"כ 25 נק').

א. (10 נק') הוכח/י שלכל $0<x$ מתקיים $x-\frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$.

ב. (15 נק') תהי $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה פעמיים. נתון ש- $f''(x)>0$ לכל $0<x$.
הוכח/י שלכל $0<x$ מתקיים $xf'(0)<f(x)<xf'(x)$.

5. (25 נק'). יהי $I$ קטע פתוח! $f:I\to\mathbb{R}$ פונק' גזירה 2007 פעמים בנק. $x_0\in I$.
נתון ש- $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(2006)}(x_0)=0$, אבל $f^{(2007)}(x_0)>0$.
הוכח/י שקיים $\delta>0$ כך ש- $f$ עולה ממש בקטע $(x_0-\delta,x_0+\delta)$.

6. (סה"כ 25 נק').

א. (10 נק') תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות רציפות במ"ש.
האם הפונקציה $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה במ"ש? אם כן הוכח/י זאת.
אם לא, הבא/י דוגמא נגדית.

ב. (15 נק'). נתונות שתי פונק' $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימות $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$.
נתון ש- $g$ רציפה במ"ש ו- $f$ רציפה. הוכח/י שגם $f$ רציפה במ"ש.

$\boxed{\text{בהצלחה!!!}}$

מהווה מקרה פרטי.

## שאלה מס. 3

א. (17 נק') הוכח את משפט Bolzano-Weierstrass לקבוצות: לכל קבוצה $E$ אינסופית וחסומה של מספרים ממשיים, לפחות נקודת הצטברות אחת.

ב. (17 נק') הוכח שהפונקציה

$$f(x) = xe^{-|x|}$$

גזירה עבור כל $x$ ממשי.

## שאלה מס. 4

א. (17 נק') הוכח את משפט הערך הממוצע של Cauchy: אם שתי פונקציות $f$ ו- $g$ רציפות בקטע סגור $[a, b]$ וגזירות בקטע פתוח $(a, b)$ ובנוסף

$$g'(x) \neq 0$$

ב- $(a, b)$, אזי $g(a) \neq g(b)$ וקיימת לפחות נקודה אחת $c$ ב- $(a, b)$ כך ש-

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} .$$

ב. (3 נק׳ כל חלק) נתונה הפונקציה

$$y = \frac{\sin x}{1 - \sin x} .$$

מצא: א) הנגזרת הראשונה; ב) תחומי עליה וירידה; ג) נקודות קיצון; ד) הנגזרת השניה; ה) תחומי קמירות וקעירות; ו) שרטט את גרף הפונקציה בקטע $[-\pi, \pi]$.

## ב ה צ ל ח ה