אוניברסיטת תל- אביב
הפקולטה למדעים מדויקים

25.2.2005

בחינה בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1
לתלמידי מתמטיקה שנה א.
המורה: מ. אפשטיין

משך הבחינה: 3.5 שעות . אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.
ענה על 4 מבין השאלות הבאות - לפחות אחת , אבל לא יותר משתיים מבין השאלות 1 , 2 ו- 3. כל שאלה- 25 נקודות.

שאלה 1

א. (**משפט** *Fermat*) תהי $f:\ A \to R$ ו $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של כל אחת מהקבוצות $A \cap (-\infty\ ,\ x_0)$ ו $A \cap (x_0\ ,\ +\infty)$. הוכח: אם x_0 היא נקודת אכסטרמום יחסי של f ויש לה נגזרת בנקודה זו, אזי $f'(x_0)=0$.

ב. נסח והוכח את משפט *Rolle*

שאלה 2

א. הגדר את המושג סדרת *Cauchy* .

ב. נסח והוכח את קריטריון *Cauchy* להתכנסות סדרה ממשית.

שאלה 3

א. יהי I רווח ו $f : I \to R$ פונקציה בעלת תכונת *Darboux* . הוכח : אם בנקודה $x_0 \in I$ קיים אחד הגבולות הצדדיים של הפונקציה f, אזי גבול זה שווה ל $f(x_0)$.

ב. ציין מסקנה של הטענה שב-א.

שאלה 4

א. תהי $f : (0,\infty) \to R$, המוגדרת ע"י $f(x) = \sqrt{x}\,sin\frac{1}{x} + \sqrt{x}$. בדוק האם פונקציה זו רציפה במידה שווה.

ב. תהי (a_n) סדרה , כך שלכל $n \ge 1$ קיים $a_{n+1} - a_n \ge \frac{1}{n}$. הוכח כי $lim\,a_n = \infty$.

F-74

שאלה 5

א. הוכח כי לכל $x \in R$ קיים : $ln\left(1+x^2\right) \leq 2xarctgx$.

ב. חשב את $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

שאלה 6

א. תהי הסדרה $\left(a_n\right)$ בעלת שני גבולות חלקיים בלבד : $0,\frac{1}{2}$. נגדיר סדרה $\left(b_n\right)$ ע"י

$$b_n = \left|a_n - \frac{1}{4}\right|$$

לכל $n \in \mathbb{N}^*$. הוכח כי הסדרה $\left(b_n\right)$ מתכנסת.

ב. מצא כמה פתרונות למשוואה : $x = 2^{\frac{x}{2}}$.

שאלה 7

א. תהי $\left(a_n\right)$ הסדרה שבה $a_1 \in \left(0,1\right)$ ולכל $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \sin a_n$. הוכח כי הסדרה $\left(a_n\right)$ מתכנסת.

ב. תן דוגמא לפונקציה מוגדרת על רווח ובעלת תכונת $Darboux$, שלה לפחות נקודת אי־רציפות אחת. נמק טענותיך.

בהצלחה!!!