

בחינה בקורס חשבון אינפיניטסימלי 2 (88-133-05/07) – מועד ב

אוניברסיטת בר-אילן, יום ד, כז אב תשפ"ב (24.8.22)

מרצים: שחר נבו, בועז צבאן. **מתרגלים:** ראם וקסמן, עידו פלדמן, הדר קנר, אושרית שטוסל.

משך הבחינה: שעתיים וחצי. ללא חומר עזר.

יש לענות על 3 שאלות מתוך 4. משקל כל שאלה 32 נקודות (המתחלקות שווה, בקירוב, בין סעיפים אם יש).
4 נקודות עבור סדר, קריאות ונקיון. יש לנמק כל תשובה.

שאלה 1 (למת העידון)

תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a, b]$, ותהי ω התנודה (אוסילציה) של הפונקציה f בקטע. תהי P חלוקה של הקטע, ותהי Q חלוקה של הקטע המתקבלת על ידי הוספת נקודה אחת חדשה לחלוקה P .

הוכח:

$$\bar{s}(P) \leq \bar{s}(Q) + \lambda(P) \cdot \omega$$

שאלה 2

א. מצא את הסכום

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{n!}$$

ב. מהם ערכי x שעבורם הטור הבא מתכנס?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n-1}}{8^n \sqrt{n^2+1}}$$

שאלה 3

בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$ נגדיר $f_0(x) := 1$ ולכל $0 \leq n$ שלם, נגדיר

$$f_{n+1}(x) := \sqrt{\cos(x) \cdot f_n(x)}$$

א. הוכח שסידרת הפונקציות $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ מתכנסת בקטע, ומצא את פונקציית הגבול.

ב. האם ההתכנסות היא במידה שווה?

ג. מצא נוסחה (ביטוי מפורש) לפונקציה $f_n(x)$, לכל n טבעי.

שאלה 4

א. תהי $f(x) := \frac{\sin(2x)}{(x+1)\log(x+1)}$. בדוק התכנסות או התבדרות של כל אחד מהאינטגרלים הבאים:

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx$$
$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x) dx$$

ב. תהי f פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$. הוכח שמתקיים:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{f(x+h) - f(x)}{h} dx = f(1) - f(0)$$

בהצלחה!