

17] נ'פ'ר'צ' ע'מ'ק' ר'א'ס.

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ ע'ל כ'ן ו'ש (ת'ט' ס'ו'ז'ר'ה $\{a_n\}$ כ'ך ש'ל-

$$|a_n x^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| \right)^n \rightarrow \infty \quad \text{א'ס } x \neq 0 \text{ י'ה'י' } \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow \infty$$

ק'פ'ר'ט ה'ט'א'ק'ר' ה'נ'פ'ע'ס' + ש'ל ה'ס'ו'ר $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ע'מ'א ש'ל'א'ף ע'ס-0
ו'ה'ס'ו'ר מ'ת'ק'צ'ר' ז'י'א'ר' ע'ס-0 $x \neq 0$ כ'ע'ש'ה'ו', ע'כ'ן ק'מ'ק'ר'ה' ז'ה'
ה'ס'ו'ר מ'ת'כ'נס' כ'ך ע'ק'ו'ר $x=0$ כ'ע'ו'מ'ר' $R=0=1/\infty$ כ'כ'ר'א'ש'.

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ פ'י'ר'א'ש' ה'צ'ק'ר' ה'וא' $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ ע'ל כ'ן
ע'כ'ס' $x \neq 0$, ע'ק'ו'ר $x > N$ $\frac{1}{2|x|} < \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}$ א'ס

$$|a_n x^n| = \left(\sqrt[n]{|a_n|} |x| \right)^n < \left(\frac{1}{2|x|} \cdot |x| \right)^n = \frac{1}{2^n}$$

$\sum \frac{1}{2^n} < \infty$, ע'כ'ן ה'ס'ו'ר מ'ת'כ'נס' כ'ה'ח'ע'ס' כ'ע'ו'מ'ר' מ'ת'כ'נס'.

ז'י'א'ר' כ'א'מ'ר' ע'כ'ס' $x \neq 0$, כ'ע'ו'מ'ר' $R=\infty=1/0$ כ'כ'ר'א'ש'.

(iii) $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty$ (נ'ס'ו'ר' $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ ע'כ'ס' x

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} |x| \right) = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{R}$$

א'ס $\frac{|x|}{R} < 1$ ו'ע'פ'י' ג'ק'י'ן ה'ש'א'כ'ס' ה'ו' + $\sum a_n x^n$ מ'ת'כ'נס' $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ ו'ע'כ'ן ה'ס'ו'ר מ'ת'כ'נס' (נ'ו'ה' $|x| < R$, א'ס

כ'ה'ח'ע'ס' $\frac{|x|}{R} > 1$ ו'ע'ק'ו'ר א'י'נ'ס'ו'ף ע'ר'כ'י' ו' $1 < \sqrt[n]{|a_n|} |x|$, כ'ע'ו'מ'ר'

$|x| > R$ ק'פ'ר'ט ה'ט'א'ק'ר' ה'נ'פ'ע'ס' + ש'ל ה'ס'ו'ר ע'מ'א ש'ל'א'ף

$|x| > R$ ו'ה'ס'ו'ר מ'ת'ק'צ'ר' ק'ס'ה'כ' ה'ס'ו'ר מ'ת'ק'צ'ר' ע'ק'ו'ר R ו'א'ו',
מ'ת'כ'נס' ע'ק'ו'ר $|x| < R$, כ'ע'ו'מ'ר' R ה'וא' כ'ז'א'ס ה'ה'ב'נ'ס'א'ה', כ'כ'ר'א'ש'.

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{k^2}{(k-1)^2 + k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{(1-\frac{1}{k})^2 + \frac{1}{k}} \quad \text{א'ס } [2]$$

ה'ק'ט'ו'י' ה'א'מ'ר'ו'ן מ'צ'י'ב' ה'ס'כ'א'ס כ'ס'כ'א'ס ר'י'א'ן ש'ל $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2 + x}$

ק'ה'ע'ס' [ר'א'ס'] ע'מ' ח'ע'ו'ק'ה' ע'ס-ה' ק'ה'ע'י'ם ש'ו'י'ם ו'ק'ח'י'ר'ת' נ'ק'ו'צ'ה'

י'מ'י'ת' כ'כ'ס' ק'ה'ע' [ה'ק'ו'נ'ק'צ'י'ה' ו'צ'א'ן] א'נ'ט'ג'ר'י'ק'ו'ל'ע'ת' מ'א'ז'ר'

והציסקי'מיינסטה של החנה שטיינברג. [לכן] היקום הוא

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left[(x - \frac{1}{2}) \frac{2}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2 \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

2. (א) הוכח שיש M_n כך ש $|f_n(x)| \leq M_n$ לכל $x \in [a, b]$ וכל $n \in \mathbb{N}$.
 (ב) הוכח ש f_n מתכנסת נקודתית לכל $x \in [a, b]$.
 (ג) הוכח ש f_n מתכנסת אחידה לכל $x \in [a, b]$.
 (ד) הוכח ש f_n מתכנסת נקודתית לכל $x \in [a, b]$ וכל $n \in \mathbb{N}$.
 (ה) הוכח ש f_n מתכנסת אחידה לכל $x \in [a, b]$.

3. א. סכום $1 + \varepsilon \leq x$ וסכום $\frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ $1 \leq n$
 סעי' מדיון M של וירטסטרס הוכיח את כנס קו"ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$ $\varepsilon > 0$, $[1+\varepsilon, \infty)$ $\geq$

$I_\sigma \stackrel{?}{=} [\bar{x}_0 - \sigma, \bar{x}_0 + \sigma]$ הקטור, $\sigma \stackrel{?}{=} (x - \bar{x})/3$ נ'נ'נ'. $1 < x_0$ ק' ק'

$$\left| \left(\frac{1}{n^x} \right)' \right| = \left| -\frac{\ln n}{n^x} \right| \leq \frac{\ln n}{n^{x_0 - \delta}} = \frac{\ln n}{n^{x_0 - 2\delta} \cdot n^\delta} \quad \rho''_{1, \delta, n} \quad \begin{array}{c} x_0 - 2\delta \\ \bullet \\ 1 \quad 1 + \delta \quad x_0 - \delta \quad x_0 \end{array}$$

$$\left| \left(\frac{1}{n^x} \right)' \right| \leq \frac{1}{n^{x-2\delta}} = \frac{1}{n^{1+\delta}} \rightarrow 0 \text{ as } \delta \geq 0 \text{ and } x > 1, \quad \frac{\ln n}{n^\delta} \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$\sum \frac{1}{n^{1.5}} < \infty$ ופסיגהון מ טע ווירטירס טור הנצרך מתכנס
 במ"ע I_f קטמשה $[-\infty, \infty)$ ופסיגהמט עס לזירה אידה

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-L_n x}{n^x}$$
 כאן יש I_0 , הסדר גזיר $I_0 - 1$ ונגזרת היא

מכאן ו- x נשפטים ב- $(1, \infty)$ נשקף כי $S(x)$ גזירה
ב- $(1, \infty)$ עם $S'(x)$ נגזרת $S'(x)$ (*).

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. דען, עסא מ'ק"י ק' קושי ערר סור זק, כעומר יט
 $\varepsilon_0 > 0$! $M, N \rightarrow \infty$ כק ע $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} < \varepsilon_0$ כעמעה
 נ'תן עקדח ε_0 עזע כרזוטטו כי סכום הטל ∞ , ע'א 'סתר'
 ס'ר מ'רדזר). ד.ס.ס. M, N כאעסו, כא $1 < x$ ק'רז מ'ספ'ר
 $1-\delta$ ס'א $\sum_{n=N+1}^M \frac{1}{n} x > \frac{\varepsilon_0}{2}$. נוקע עע'א מ'ק'י ק' קושי
 ע'התכנסות ב e_n ק- $(1, \infty)$ ו'טל ע'א מ'תכנס ע'ס ק'מ'ע.

[4] כא. ד. $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x \sqrt{x(\sqrt{1+x}-1)}} dx$ ק'רזע ק'ע"ג- ו'ר'זק ק' $x=0$.

מ'ק'י ק' $0 \leq f(x) = \frac{2 \sin^2 x/2}{x^{3/2}(\sqrt{1+x}-1)} = (3/13)$
 $= \frac{2 \sin^2 x/2 (\sqrt{1+x}+1)}{x^{5/2}}$ מ'תה ע'ס $x=0$ כ'א $1/x^{1/2}$ ק'מ'ע.

$\left[\frac{2 \sin^2 x/2 (\sqrt{1+x}+1)}{x^{5/2}} \right] / (1/x^{1/2}) = \frac{2 \sin^2 x/2 (\sqrt{1+x}+1)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$
 ד.ס.ס. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} < \infty$ ע'ס ρ ה'אטענדע ע'סו מ'תכנס.

ע'ס ה'אטענדע ה'ט', $\int_0^{\infty} f(x) dx$ ה'ר' ע'רז x ע'ס מ'ספ'ר
 $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x^{3/2}(\sqrt{1+x}/2)} = \frac{4}{x^{3/2} \sqrt{1+x}} \leq \frac{4}{x^{1/2}}$
 $\int_1^{\infty} \frac{4}{x^{1/2}}$ ע'ס ρ ה'אטענדע ע'סו מ'תכנס.

ק.כ' ה'טו'ו'ן ה'טע'ס': $0 \leq e^{-t^2} - e^{-x^2}$ ק- $[0, x]$ מ'תכנסר ה'
 ק $t=x$. נ'עזר $0 < \int_0^x (e^{-t^2} - e^{-x^2}) dt < \int_0^x e^{-t^2} dt$ כעומר $x e^{-x^2}$, כ'כז.

ק' ה'טו'ו'ן ה'ט'ו': נ'עזר $h(x) = \arctan x - \int_0^x e^{-t^2} dt$, $h(0)=0$,
 $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - e^{-x^2}$, כ'כא $0 \leq h'(x)$. ד.ס. $\frac{1}{1+x^2} \geq e^{-x^2}$.

נ'ר ס'ק $t=x^2$. ס'א $1+t \geq e^t$ ו'זק נ'ון, ע'ס שו'ו'ן
 ק' ע'רז $t=0$ (כעומר $x=0$), ע'ס ע'ס.

$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots$ ז'ה $e^t > 1+t$ (מ'ה'ו'ק ע'ס)
 (3). ד' כ'ה נ'ק'רזר ו'ס ק'כ'א'ו'ת). -3-