

## בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-05-07) - מועד ב'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', כ"א אדר ב' תשע"ו (31.3.16)

**מרצים:** בועז צבאן, מיכאל שיין.

**מתרגלים:** ניר שוורץ, איתמר שטיין, מני שלוסברג.

**משך הבחינה:** שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

### הנחיות

א. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה בלבד. לאחר שמצאת פתרון, כתוב אותו בצורה מסודרת במקום המתאים בגוף הבחינה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא לתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	ניקוד (לשימוש הבודקים)
1	
2	
3	
4	
5	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

**הבהרה.** גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

**בהצלחה!**

## שאלה 1

א. נסח והוכח את מבחן העיבוי להתכנסות טורים חיוביים.

ב. הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את ההכללה הבאה של מבחן העיבוי:

תהי  $a_n$  סידרה חיובית יורדת.

תהי  $m_n$  סידרה עולה ממש של מספרים טבעיים, כך שלכל  $n$  מתקיים  $2^n \leq m_n$ .

אזי הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  והטור  $\sum_{n=1}^{\infty} m_n \cdot a_{m_n}$  מתכנסים ומתבדרים יחד.

**תשובה:**

## שאלה 2

א. תהי  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  סידרה המוגדרת בעזרת נוסחת הנסיגה הבאה:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^3}, n \text{ טבעי } , a_1 = 1$$

קבע האם הסידרה  $a_n$  מתכנסת (במובן הצר) או לא.

ב. מצא את הגבול

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right)$$

תשובה:

### שאלה 3

א. יהי  $b$  מספר ממשי. הגדר את המונח " $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ".

ב. תזכורת: פונקציה נקראת עחזרית אם קיים מספר ממשי חיובי  $c$  ("מחזור") כך שלכל  $x$  מתקיים  $f(x+c) = f(x)$ .

הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, את הטענה הבאה: אם  $f$  הינה פונקציה מחזורית שמוגדרת בקרן  $(0, \infty)$  והגבול  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  קיים וממשי, אזי קיים מספר ממשי חיובי  $a$  כך שהפונקציה  $f$  קבועה בקרן  $(a, \infty)$ .

**תשובה:**

#### שאלה 4

- א. תהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הגדר את המינוח "הפונקציה  $f$  רציפה במידה שווה בתחום  $A$ ".
- ב. תהי  $f(x)$  פונקציה רציפה במידה שווה בקרן  $(0, \infty)$ , המקיימת  $1 < f(x)$  לכל  $x \in (0, \infty)$ . הוכח שהפונקציה  $\sqrt{f(x)}$  רציפה במידה שווה בקרן  $(0, \infty)$ .

תשובה:

## שאלה 5

יהי  $a > 0$  מספר ממשי. נגדיר

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax}-1}{x^2+4x} & x < 0 \\ x^a + \frac{1}{a} & x \geq 0 \end{cases}$$

קבע לאילו ערכים  $a > 0$  הפונקציה  $f$  רציפה בקרן  $(-4, \infty)$ .

**תשובה:**