בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-05-07) - מועד א׳

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה׳, ט׳ אדר א׳ תשע״ו (18.2.16)

מרצים: בועז צבאן, מיכאל שיין.

מתרגלים: ניר שוורץ, איתמר שטיין, מני שלוסברג.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

הנחיות

א. יש לענות על **4** מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה בלבד. לאחר שמצאת פתרון, כתוב אותו בצורה מסודרת במקום המתאים בגוף הבחינה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	24
2	24
3	24
4	24
5	24
סדר ונקיון	4
סה״כ	עובר

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את משפט ויירשטראס השני: כל פונקציה רציפה בקטע סגור מקבלת מקסימום ומינימום שם.

תשובה:

תהי f פו' רציפה בקטע סגור $[a,b]$, כאשר $a<b$.

ממשפט קודם, במצב כזה f ~~מקבלת מקסימום ומינימום~~ חסומה שם, כלומר הקבוצה

$\{f(x) : a \le x \le b\}$ חסומה. יהי s הסופרמום של קבוצה זו.

אזי יש איברים y_n בקבוצה כך ש $y_n \to s$ (לכל n נקח y_n בקבוצה $s-\frac{1}{n} \le y_n$.

יש כזה כי s חסם עליון ולכן $s-\frac{1}{n}$ אינו חסם מלעיל. אז $s \leftarrow s-\frac{1}{n} \le y_n \le s$,

וממשפט הסנדביץ' $y_n \to s$).

לכל n, נקבע $x_n \in [a,b]$ כך ש $y_n = f(x_n)$. הסדרה $(x_n)_n$ חסומה ($a \le x_n \le b$ לכל n),

ולכן יש לה תת-סדרה מתכנסת $c_n \to c$.

$a \le c_n \le b$ לכל n, ולכן גם הגבול מקיים $a \le c \le b$.

(c_n) תת-סדרה של (x_n), לכן $f(c_n)$ תת-סדרה של (y_n) ולכן $f(c_n) \to s$.

$c_n \to c$ ו-f רציפה, לכן $f(c_n) \to f(c)$. מיחידות הגבול, $f(c) = s$.

לסיכום, הסופרמום של הקבוצה $\{f(x) : a \le x \le b\}$ הוא $f(c)$ ששייך לקבוצה, ולכן יש לקבוצה מקסימום.

ההוכחה שיש ל-f מינימום בקטע ~~זהה~~ דומה.

לחילופין, ממה שהוכחנו לכל פו' רציפה, יוצא שלפו' $(-f)$ יש מקסימום בקטע

וקל לראות שזה מינימום של הפו' המקורית f. //

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבע האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{10n+9\sin n}$.

תשובה:

א. קיים מס' טבעי שממנו ואילך מתקיים: $\left|\frac{-3n^2+62n+1}{4n^5-26n^2+7}\right|\leq\frac{3n^2}{3n^5}=\frac{1}{n^3}$

אכן, $\underset{=}{n^5-26n^2+7}\to\infty$ ובפרט חיובי (~~מתכנס~~) לבסוף. לכן, לבסוף,

$4n^5-26n^2+7=3n^5+(n^5-26n^2+7)\geq 3n^5$.

$\sum\frac{1}{n^3}$ מתכנס, ולכן ממבחן ההשוואה, הטור מתכנס בהחלט.

$$\left[\underbrace{n^5}_{\to\infty}\Big(1-\underbrace{\underbrace{\tfrac{26}{n^3}}_{\to 0}+\underbrace{\tfrac{7}{n^5}}_{\to 0}}_{}\Big)\quad \to 1\right]$$

ב. $\sqrt[n]{n!}\geq\sqrt[n]{1}=1$. $\sum\frac{1}{n}=\infty$, ולכן ממבחן ההשוואה, $\sum\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\infty$.

ג. $$\frac{1}{10n+9\sin n}-\frac{1}{10n}=\frac{-9\sin n}{\underbrace{(10n+\underbrace{9\sin n}_{\geq -9})}_{\geq n}10n}$$

$$\left|\frac{-9\sin n}{(10n+9\sin n)\cdot 10n}\right|\leq\frac{10}{n\cdot 10n}=\frac{1}{n^2}$$

הטור $\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן הטור $\sum(-1)^n\left(\frac{1}{10n+9\sin n}-\frac{1}{10n}\right)$ מתכנס (בהחלט).

מלייבניץ, הטור $\sum(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$ מתכנס, ולכן גם הטור $\sum-\frac{(-1)^n}{10n}$ (כפל בקבוע) מתכנס.

הטור הוא הסכום של שני הטורים המתכנסים האלה, ולכן <u>מתכנס</u>.

הטור אינו מתכנס בהחלט: $$\frac{1}{10n+\underbrace{9\sin n}_{\leq 9}}\geq\frac{1}{10n+9}\underset{\text{לבסוף}}{\geq}\frac{1}{n}$$

$\sum\frac{1}{n}=\infty$, לכן ממבחן ההשוואה, $\sum\left|(-1)^n\frac{1}{10n+9\sin n}\right|=\sum\frac{1}{10n+9\sin n}=\infty$

לכן, הטור מתכנס <u>בתנאי</u>.

שאלה 3

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמתכנסת לגבול a הוכח שאם

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

לכל מספר טבעי n, אזי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

תשובה: הגדרה $a \in \mathbb{R}$: יהי נתון מספר $\varepsilon > 0$.

$a_n \longrightarrow a$, לכן יש N טבעי שממנו והלאך מתקיים $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

לכל $N \leq n$:

$$|b_n - a| = \left| \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} - \frac{na}{n} \right| = \left| \frac{(a_1 - a) + \cdots + (a_{N-1} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n} \right| =$$

$$= \frac{1}{n} \left| \left((a_1 - a) + \cdots + (a_{N-1} - a)\right) + (a_N - a) + \cdots + (a_n - a) \right| \overset{\text{א"ש}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n} \left| (a_1 - a) + \cdots + (a_{N-1} - a) \right|}_{c \text{ (קבוע שלא תלוי ב-}n)} + \frac{1}{n} \Big(\overbrace{\underbrace{|a_N - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \cdots + \underbrace{|a_n - a|}_{< \frac{\varepsilon}{2}}}^{\text{פחות מ-}n\text{ מחוברים}} \Big) \leq$$

$$\leq \frac{c}{n} + \frac{1}{n} \cdot n \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \frac{c}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

$\frac{c}{n} \longrightarrow 0$, לכן יש $\tilde{N}$ שממנו והלאה $\frac{c}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $M := \max\{N, \tilde{N}\}$. לכל $M \leq n$, מתקיים

$$|b_n - a| \leq \frac{c}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\tilde{N} \leq n}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ולכן $|b_n - a| < \varepsilon$.

הראינו שלכל $\varepsilon > 0$ יש מספר M שממנו והלאך מתקיים $|b_n - a| < \varepsilon$.

זה אומר ש $b_n \longrightarrow a$. //

שאלה 4

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ **רציפה במידה שווה** בתחום A".

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$. הוכח שהפונקציה $f(x+5776)-f(x)$ הינה חסומה.

תשובה:

א. f רציפה במידה שווה בתחום A אם: לכל מספר $\varepsilon>0$ יש מספר $\delta>0$ כך שמתקיים $|f(a)-f(b)|<\varepsilon$ לכל $a,b\in A$ כך ש $|a-b|<\delta$.

ב. מהנתון, בפרט עבור $\varepsilon:=1$, יש מספר $\delta>0$ כך ש $|f(a)-f(b)|<1$ לכל a,b כך ש $|a-b|<\delta$. בפרט, השלב האחרון יהיה נכון אם נקטין את δ לערך חיובי קטן יותר.

~~(נקח N טבעי כך ש $\delta < N$)~~

יהי k מספר טבעי כך ש $\frac{1}{k}<\delta$ (כלומר $\frac{1}{\delta}<k$). יהי $x\in\mathbb{R}$.

נתבונן בערכי הפו' f בנקודות $x,\ x+\frac{1}{k},\ x+\frac{2}{k},\ \dots,\ x+\frac{5776k}{k}=x+5776$.

$$|f(x+5776)-f(x)| = \Big|f(x+5776)-f\big(x+5776-\tfrac{1}{k}\big)+f\big(x+5776-\tfrac{1}{k}\big)-f\big(x+5776-\tfrac{2}{k}\big)+$$

$$+\,\cdots+f\big(x+\tfrac{2}{k}\big)-f\big(x+\tfrac{1}{k}\big)+f\big(x+\tfrac{1}{k}\big)-f(x)\Big| \underset{\text{מא"ש}}{\le}$$

$$\le \Big|f(x+5776)-f\big(x+5776-\tfrac{1}{k}\big)\Big|+\Big|f\big(x+5776-\tfrac{1}{k}\big)-f\big(x+5776-\tfrac{2}{k}\big)\Big|+\cdots$$

$$\cdots+\Big|f\big(x+\tfrac{2}{k}\big)-f\big(x+\tfrac{1}{k}\big)\Big|+\Big|f\big(x+\tfrac{1}{k}\big)-f(x)\Big| \le \underbrace{\varepsilon+\varepsilon+\cdots+\varepsilon}_{\text{5776k-1 מחוברים}} \le$$

$$\le 5776k\varepsilon = 5776k.$$

המספר k אינו תלוי ב- x, ולכן הביטוי $5776k$ הוא חסם של הערכים המוחלטים של ערכי הפונקציה $f(x+5776)-f(x)$. ‖

שאלה 5

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בכל נקודה פנימית של הקטע הזה. נניח כי $f'(c)\neq 1$ לכל $c\in(a,b)$. נקודה c נקראית נקודת שבת של הפונקציה $f(x)$ אם $f(c)=c$. הוכח כי לפונקציה $f(x)$ יש לכל היותר נקודת שבת אחת בקטע $[a,b]$.

תשובה:

תהי $g(x):=f(x)-x$ לכל x ממשי.

הפונקציה g גזירה בכל נק' פנימית בקטע $[a,b]$ ורציפה בקטע $[a,b]$, כהפרש שתי פו' עם תכונה זו (הפו' $f(x)$ ו- x).

נניח, על דרך השלילה, שלפו' f יש שתי נק' שבת ב $[a,b]$, נאמר $a\le c_1<c_2\le b$ כך ש $f(c_1)=c_1$, $f(c_2)=c_2$.

אז מהגדרת הפו' g, נקבל $g(c_1)=0, g(c_2)=0$.

ממשפט רול (בין שני אפסים של פו' גזירה יש אפס לנגזרת), יש $c_1<c<c_2$ כך ש $f'(c)-1 \underset{\uparrow \atop g(x)=f(x)-x}{=} g'(c)=0$, ולכן $f'(c)=1$; סתירה לנתון. //