שאלה 1

יהיו f,g שתי פונקציות גזירות בנקודה x_0.

אזי מתקיים fg גזירה ב x_0 ומתקיים

$$(fg)'(x_0)=(f'g)(x_0)+(fg')(x_0)$$

הוכחה

$$(fg)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(fg)(x)-(fg)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)g(x)-f(x)g(x_0)+f(x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\left(g(x)-g(x_0)\right)+g(x_0)\left(f(x)-f(x_0)\right)}{x-x_0}$$

20

אם f גזירה אז רציפה, לפי אריתמטיקה של גבולות

$$=f(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}+g(x_0)\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$=f(x_0)\cdot g'(x_0)+g(x_0)\cdot f'(x_0)=(fg')(x_0)+(f'g)(x_0)$$

שאלה 6

(ד)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x^2}{x^2\sin x}=$$

לופיטל

$$\overset{0}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-2x}{2x\sin x+\cos x\cdot x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x\sin x+\cos x\cdot x^2}$$

אריתמטיקה של גבולות

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2x\sin x+x^2}=\frac{\infty}{\infty}\to\frac{1}{\dots}=\frac{1}{\infty}$$

המכנה: משתנה לפי אפסות $\sin x$ / מצורה זו

כלומר משתנה כיון שם ולכן השואף לאפס $2x\cos x$ כל לי מיותר

x^2 גם שואף לאפס מהתחתית ובגלל $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

לכן קיבלנו מצב של גבולות $\frac{1}{0^+}$ שזה ∞.

(ה) צ"ל $\limsup\{a_n\}$ ו-$\liminf\{a_n\}$ עבור

$$a_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n}$$

נראה כי עבור $a_{n_k}=a_{2n}$ נקבל limsup מכיון שאז $(-1)^n=1$

ולכן

$$a_{n_k}=a_{2n}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\xrightarrow{n\to\infty} e$$

עבור $a_{n_k}=a_{2n+1}$ נקבל liminf כי אז $(-1)^n=-1$ ...

ושאר ערכי הסדרה ...

הערות המורה

$$a_{2n+1} = \left(1+\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)^{(2n+1)(-1)^{2n+1}} = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{((2n+1))^{-1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{(2n+1)^{-1}}$$

נחליף משתנים ונקבל $X=\frac{1}{2n+1}$ $\quad \underset{x\to 0}{n\to\infty}$

נחשב את גבול הפונקציה $(1-x)^X$

ואז גבול הסדרה יהיה שווה לגבול.

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^x = \lim_{x\to 0} e^{\ln\left((1-x)^x\right)} \overset{\text{אריתמטיקה}}{=} \lim_{x\to 0} e^{x\ln(1-x)} \overset{\text{רציפות } e}{=} e^{\lim_{x\to 0} x\ln(1-x)}$$

כעת מכוח רציפות e נחשב

$$\lim_{x\to 0} x\ln(1-x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{לופיטל}}{=} \frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{1-x} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-2x}{-1} = \lim_{x\to 0} 2x = 0$$

סה"כ $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = e^0 = 1$

לכן
$$\boxed{\begin{gathered}\limsup\{a_n\} = e \\ \liminf\{a_n\} = 1\end{gathered}}$$

עשינו מקרי קצה ולכן אלו הגבולות החלקיים המקסימלי/מינימלי
בשאר המקרים או שקיבלנו אותו דבר או תתי סדרות מתבדרות.

שאלה 3

א) האם מתכנס ובאיזה צורה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$?

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$$

נבדוק ראשית התכנסות בהחלט:

סימון

$$b_n = |a_n| = \frac{1}{n-\ln(n)}$$

$n-\ln n$ חיובי כי $n > \ln n$ לכל n (בעזרת צורה של e^n ...)

~~...~~ אם כן לכל n: $n \geq n-\ln n$

לכן $\frac{1}{n-\ln n} \geq \frac{1}{n}$

ועבור n מסוים $\frac{1}{n-\ln n} > \frac{1}{n}$

לכן $|a_n| > \frac{1}{n}$ ולכן לא מתכנס בהחלט.

נוכיח שהסדרה b_n מונוטונית יורדת לאפס כדי שהטור יתכנס מתכנס.

נחשב $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}$$

נחשב

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{\ln n}{n} = 1-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \overset{\text{לופיטל}}{=} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n-\ln n} \overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)} \overset{\text{אריתמטיקה של גבולות}}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} n \cdot \underbrace{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)}_{1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

$$c_{n+1}-c_n = \frac{1}{(n+1)-\ln(n+1)} - \frac{1}{n-\ln n}$$

$$= \frac{n-\ln n-n-1+\ln(n+1)}{((n+1)-\ln(n+1))(n-\ln n)} = \frac{\ln(n+1)-\ln n-1}{((n+1)-\ln(n+1))(n-\ln n)}$$

$$\overset{\text{חוקי לוג}}{=} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-1}{((n+1)-\ln(n+1))(n-\ln n)} \overset{\text{תכונות ln}}{=} \frac{\overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{0<}-1}{((n+1)-\ln(n+1))(n-\ln n)} < 0$$

הסבר: המונה ~~ש~~שלילי והמכנה שואף חיובית שלילי

כי $\ln(1+\frac{1}{n})\to 0$ מכיוון ש $1+\frac{1}{n}\to 1$ ו-ln רציפה ומונוטונית.

לכן c_n מונוטונית יורדת וגם כי הגבול הוא 0 ושלב הבא

זה תנאי מ"ל.

שנ"ל קיבלנו טור לייבניץ של $(-1)^n$ כפול $\frac{n}{n-\ln n}$ שבו היא סדרה

מונוטונית יורדת ל0.

לכן הטור מתכנס בתנאי.

(ב)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

~~[illegible]~~ הטור שלנו חיובי מכיון ש sin [illegible] $\frac{1}{n}$ לכל n

לכן זה חוזר בקטע $(0,1]$ ששם sin חיובית.

לכן הטור שלנו חיובי.

נשווה את הטור שלנו ל $\frac{1}{n^2}$.

$$\frac{\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n}\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right) = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

נסמן $x=\frac{1}{n}$ $\quad n\to\infty$, $x\to 0$

ויש לנו גבול יסודי כמו גבול $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$

לכן הטור שלנו ו $\frac{1}{n^2}$ מתנהגים [illegible] במבחן ההשוואה

~~[illegible]~~ ולפי ההשוואה כי $\frac{1}{n^2}$ מתכנס

לכן הטור שלנו מתכנס בהחלט.

המשך בעמוד הבא

② באילו ערכי α הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\ln n}$ מתכנס?

נשים לב ש-

$$\alpha^{\ln n} = e^{\ln(\alpha^{\ln n})} \overset{\text{תכונות לוג}}{=} e^{\ln n \cdot \ln\alpha} \overset{\text{חוקי חזקות}}{=} (e^{\ln n})^{\ln\alpha} = n^{\ln\alpha}$$

ראינו כי הטור n^m מתכנס אמ"מ $m<-1$

לכן נדרוש להתכנסות $\ln\alpha<-1$ כי לפי הוכחה סימן כי $e>1$

$$\boxed{\alpha < e^{-1}}$$

עבור $\alpha \geq e^{-1}$ הטור שלנו מתבדר.

שאלה 2

(ב) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\dots+n^n}}{n}$

נשים לב כי לכל n

$$\frac{\sqrt[n]{n^n}}{n} = \frac{n}{n} = 1 \le \frac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n} \le \frac{\sqrt[n]{n^n+\dots+n^n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n\cdot n^n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n^n}}{n}$$

$$\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n^n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{n}\cdot n}{n} = \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

נוכיח כי הגבול הנ"ל נכון

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n^{\frac{1}{n}})} \overset{\text{רציפות}}{=} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n}$$

$$\overset{e \text{ רציפה}}{=} e^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n} \overset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \text{ מכאן}$$

מכאן $\sqrt[n]{n} \to e^0 = 1$

לכן לפי כלל (הסנדוויץ')

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1^n+\dots+n^n}}{n} = 1$$

ב)

$a_1 = 1$

לכל $n \geq 1$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$

צ"ל $\{a_n\}$ מתכנסת.

אם היא מתכנסת לגבול L $\quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = L$

$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n+1}$

אז $\sqrt{L+1} = L \;/()^2$

$$L^2 = L+1$$

$$L^2 - L - 1 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \to L_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$L_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618 < 0$$

L_2 נפסל כי קטן מאפס ו $a_1 = 1$

וגם $n \geq 1$ $\quad a_{n+1} = \sqrt{a_n+1} > 0$ לכן כל האיברים חיוביים

אז לא אפשרי שמתכנס לגבול קטן מאפס.

נוכיח ש a_n מתכנסת לגבול $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618$

כלומר מונוטונית עולה וחסומה מלעיל.

מונוטוניות עולה

נוכיח באינדוקציה שלכל $n\in\mathbb{N}$

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

בסיס האינדוקציה: $n=1$: $a_n=1$

$$a_2 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$a_2 - a_1 = 0.414 > 0$$

הנחת האינדוקציה: נניח שעבור n מתקיים $a_{n+1}-a_n>0$

כלומר $a_{n+1}>a_n$

צעד האינדוקציה: נוכיח $a_{n+2}-a_{n+1}>0$ $a_{n+1}>a_n$

$$\sqrt{a_{n+1}+1} - \sqrt{a_n+1} > \sqrt{a_n+1} - \sqrt{a_n+1} = 0$$

לכן לכל $n\in\mathbb{N}$ $a_{n+1}-a_n>0$

כלומר הסדרה מונוטונית עולה.

כעת נוכיח שלב אחד $\frac{1+\sqrt5}{2} > a_n$

עבור $n=1$ $1 < 1.618 \approx \frac{1+\sqrt5}{2}$

נניח שזה נכון לn מסוים $\frac{1+\sqrt5}{2} > a_n$

נוכיח שזה נכון ל $n+1$

$$\frac{1+\sqrt5}{2} > a_{n+1} = \sqrt{a_n+1}$$

מכיוון ששני האגפים חיוביים זה שקול לריבוע

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 > (a_{n+1})^2$$

$$\frac{1+5+2\sqrt5}{4} = \frac{3+\sqrt5}{2} > a_n+1$$

זה שקול לנתון $\frac{3+\sqrt5}{2} - 1 > a_n$ 10

$$\frac{3+\sqrt5-2}{2} = \frac{1+\sqrt5}{2} > a_n$$

אבל קיבלנו בדיוק $\frac{1+\sqrt5}{2} > a_n$ שזו הנחת האינדוקציה.

לכן בהוכחה באינדוקציה הוכחנו ש a_n חסומה מלמעלה ומונוטונית עולה.

לפי משפט שלמדנו בהרצאה a_n מתכנסת

ולפי מה שקיבלנו a_n מתכנסת ל $\frac{1+\sqrt5}{2}$.

שאלה 2 -את 2 סעיפי[ם] המסומנים הבאים

(ב) f רציפה במידה שווה בקטע (a,∞)

האם f^2 רציפה במ"ש ב (a,∞)?

נפריך בדוגמא: $f(x)=x$, $f^2(x)=x^2$ בקטע $(0,\infty)$

ראשית נוכיח ש $f(x)=x$ רציפה במ"ש: יהי $\varepsilon>0$ נתון.

נבחר $\delta=\varepsilon$ ואז עבור $x,y\in(a,\infty)$: $|x-y|<\varepsilon$

$|f(x)-f(y)|=|x-y|<\varepsilon$

לכן $f(x)=x$ מקיימת הגדרת רציפות במ"ש.

נוכיח ש $f^2(x)$ לא רציפה במ"ש ב (a,∞)

עבור $\varepsilon=1$ ניקח לכל δ $x,y\in(a,\infty)$ כך ש $|x-y|<\frac{\delta}{2}$ אז $y=x+\frac{\delta}{2}$

$$|f^2(x)-f^2(y)|=|x^2-y^2|=|x-y||x+y|<\delta|x+x+\frac{\delta}{2}|$$
$$=\delta|2x+\frac{\delta}{2}|$$

עבור x מספיק גדול יתקיים $\delta|2x+\frac{\delta}{2}|\geq 1$

לכן הוכחנו שקיים ε כך שלכל δ קיימים x,y כך ש $|x-y|<\delta$
$|f^2(x)-f^2(y)|\geq 1$

לכן הפונקציה $f^2(x)=x^2$ לא רציפה במ"ש.

6

הערות הבודק

שאלה 2

$1 \le a < b$

צ"ל $2\ln\left(\frac{b}{a}\right) < b^2 - a^2$

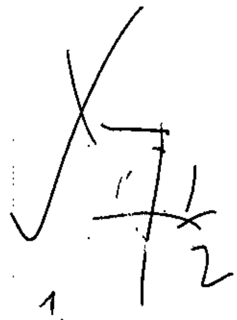
נבצע שינוי נוסחה : $\frac{2\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{b^2-a^2} < 1$ ($b>a$ לכן b^2-a^2 חיובי)

חוקי ln $\frac{2(\ln b - \ln a)}{b^2-a^2} < 1$

ניקח $f(x)=2\ln x$ ו-$g(x)=x^2$ ברור כי $f(x)$ ו-$g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ וגזירות בקטע (a,b) (וכמו כן אין מינוס את הגבול של ln) $(g'(x)\neq 0)$

לפי משפט הערך הממוצע של קושי קיימת $c\in(a,b)$ כך ש

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{2\ln(b)-2\ln(a)}{b^2-a^2}$$



$f'(x) = \frac{2}{x}$ $\quad g'(x) = 2x$ $\quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{2x} = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{2\ln b - 2\ln a}{b^2-a^2} = \frac{1}{c^2}$$

מכיוון ש $c\in(a,b)$ $\quad 1\le a<c<b$

אז $\frac{1}{c^2}<1$ ולכן $\frac{1}{c^2} = \frac{2\ln b-2\ln a}{b^2-a^2} < 1$ ∎

(ב) נתון: f רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$

צריך להוכיח כי גם f^2 רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$.

מכיון ש f רציפה במ"ש בקטע $[a,b]$ היא חסומה ולכן קיים M כך ש

יהי $\varepsilon>0$ נתון, כך שלכל $x\in[a,b]$ $|f(x)|\le M$.

קיים $\delta>0$ כך שעבור $x,y\in[a,b]$ ו $|x-y|<\delta$

מתקיים $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2M}$

ניקח אותו δ ו x,y

$$|f^2(x)-f^2(y)|=|(f(x)-f(y))(f(x)+f(y))|=|f(x)-f(y)|\,|f(x)+f(y)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot|f(x)+f(y)|\le\frac{\varepsilon}{2M}(|f(x)|+|f(y)|)$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2M}\cdot(M+M)=\frac{\varepsilon\cdot 2M}{2M}=\varepsilon$$

לכן f^2 מקיימת הגדרת רציפות במ"ש ולכן רציפה במ"ש.