שאלון סגור

ועדת המשמעת מזהירה!
נבחן שימצאו ברשותו חומרי
עזר אסורים או יתפס בהעתקה
יענש בחומרה עד כדי הרחקתו
מהאוניברסיטה

בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-01) - מועד א'

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה', ז' אדר תשע"ה (26.2.15 למ')

מרצה: בועז צבאן.

מתרגלים: איתמר שטיין, ארז שיינר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

שנת :תשע"ה סמסטר : 1 מועד : 1 מטלה : 1 מס' מחז' : 1
קורס : 01 132 88 חשבון אינפיניטסימלי 1

הנחיות

א. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא תתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)	**ניקוד** (לשימוש הבודקים)
1	23
2	24
3	
4	21
5	24
סדר ונקיון	4
סה"כ	100 יפה!

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את המשפט הבא: תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ המקיימת $f(a) < 0 < f(b)$. הוכח שקיים מספר c בקטע $[a,b]$ כך ש $f(c) = 0$.

תשובה:

<u>הגדרה</u>: עבור פונק' f נאמר שהיא "נורמלית" על קטע $[a,b]$ אם $f(a)\cdot f(b) < 0$

תהי f פונק' רציפה על $[a,b]$ המקיימת את התנאי: $f(a)<0<f(b)$, אזי f נורמלית על הקטע. נגדיר $d_1 := \frac{a+b}{2}$. אם $f(d_1)=0$ מצאנו את הנקודה! אחרת: אם $f(d_1)>0$ נגדיר $I_1 := [a,d_1]$ ואם $f(d_1)<0$ נגדיר $I_1 := [d_1,b]$. נשים לב ש-f נורמלית על I_1 לפי איך שהגדרנו אותו. נמשיך כך באופן איטרטיבי - נבנה את I_n שאלו אינו מסתיים, אם f מקבלת 0 בנק' האמצע סיימנו. ואחרת ניקח את מחצית הקטע עליו f "נורמלית" שיהיה I_{n+1}. נשים לב ש- $|I_n| = \frac{b-a}{2^n}$ ולכן $\lim_{n\to\infty}|I_n| = 0$.

כעת ניצבות בפנינו שתי אפשרויות:

(א) קיים n עבורו f מקבלת 0 באחד מקצוות I_n.

(ב) נוכל לפי למת קנטור למצוא נק' $c\in[a,b]$ כך ש- $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

במקרה (א) סיימנו! במקרה (ב) נתבונן בסדרת הקצוות השמאליים של I_n (נקרא לה x_n) ובסדרת הקצוות הימניים של I_n (נקרא לה y_n).

שוב לפי למת קנטור $x_n \to c$ וכן $y_n \to c$, ולכן מרציפות $f(x_n)\to f(c)$ ו-$f(y_n)\to f(c)$

<u>כעת</u>: $f(x_n)<0$ לכל n ולכן $f(c)\le 0$. אבל $f(y_n)>0$ לכל n ולכן $f(c)\ge 0$.

מכאן נובע $f(c)=0$ ומצאנו את הנק'! מש"ל.

23.

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-2n-1}{4n^4-5n^2-6}$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-6\sin n+5}$.

תשובה:

(א) נוכיח תחילה שקיים זנב של הטור שכולו חיובי, ע"י פתרון המשוואות:

I $3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x=1,-\frac{1}{3} \Rightarrow 3n^2-2n-1\geq 0$ (החל מ-$n=1$)

II $4x^4-5x^2-6=0 \Rightarrow x=\sqrt{2},-\sqrt{2}$; $n=2 \Rightarrow 4\cdot 2^4-5\cdot 2^2-6=38>0 \Rightarrow$

$4n^4-5n^2-6>0$ (החל מ-$n=2$) $\Leftarrow$ נתבונן בזנב של הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3n^2-2n-1}{4n^4-5n^2-6}$

יפה מאוד!

כיוון שהזנב חיובי נוכל להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי עם $b_n=\frac{1}{n^2}$.

$$\frac{\frac{3n^2-2n-1}{4n^4-5n^2-6}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{3n^4-2n^3-n^2}{4n^4-5n^2-6} = \frac{3-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4-\frac{5}{n^2}-\frac{6}{n^4}} \to \frac{3}{4};$$

$\frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן הטור שלנו מתכנס בהחלט (כי למעשה כל הטור חיובי כי עבור $n=1$ הוא מקבל 0).

(ב) $\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n}{n!}} = \sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}}$. טענה: $\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}} \geq \frac{1}{n}$.

הוכחת הטענה: $\sqrt[n]{\frac{1}{(n-1)!}} \geq \frac{1}{n} \Leftarrow \sqrt[n]{(n-1)!}\leq n \Leftarrow (n-1)! \leq n^n$. $\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור שלנו מתבדר (כיוון שהטור חיובי יכולנו להשתמש במבחן ההשוואה).

סוף (ב) בצד השני של הדף

(6) $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-6\sin n+5}$

$$\boxed{\frac{1}{n+11}\le\frac{1}{n-6\sin n+5}\le\frac{1}{n-1}}$$

ראשית נבדוק התכנסות בהחלט:

נבדוק את התכנסות $\frac{1}{n+11}$ לפי מבחן ההשוואה ~~...~~ הגבולי ($\frac{1}{n}$

$$\frac{\frac{1}{n+11}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+11}\to 1 \Rightarrow \frac{1}{n+11}\ \text{מתבדר} \Rightarrow$$

הטור שלנו בערך מוחלט מתבדר לפי מבחן ההשוואה.

סופו כיוון ש- $\frac{1}{n-1}\ge\frac{1}{n-6\sin n+5}\ge\frac{1}{n+11}$ ו- $\sum\frac{(-1)^n}{n-1}$, $\sum\frac{(-1)^n}{n+11}$

מתכנסים לפי לייבניץ, גם הטור שלנו יתכנס לפי משפט הסנדוויץ'.

לכן הטור מתכנס בתנאי.

שאלה 3

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בכל $\mathbb{R}$, ומקיימות $\lim_{x\to a} f(x) = b$, ובנוסף $\lim_{y\to b} g(y) = c$.

א. נתבונן בפונקציה

$$.h(y) := \begin{cases} g(y) & y \neq b \\ c & y = b \end{cases}$$

הוכח: $\lim_{x\to a} h(f(x)) = c$.

ב. הפרך, על ידי דוגמא נגדית, את הטענה $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$.

תשובה:

שאלה 4

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ **רציפה במידה שווה** בתחום A."

ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$, המקיימת $f(x) > 1$ לכל $x \in (0,\infty)$.
הוכח שהפונקציה $\sqrt{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקרן $(0,\infty)$.

תשובה:

(א) הגדרה: תהי פונק' $f(x)$ המוגדרת בקב' $A\subseteq\mathbb{R}$. נאמר ש-$f(x)$ רציפה במידה שווה על A אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך שלכל $x,y\in A$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

10/10

(ב) נשים לב: $f(x)>1 \Rightarrow \sqrt{f(x)}>1$. עוד נשים לב:

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}|\cdot|\overset{>1}{\sqrt{f(x)}}+\overset{>1}{\sqrt{f(y)}}| > |\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}|\cdot 2 \Rightarrow |\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}| < \frac{|f(x)-f(y)|}{2} \quad (*)$$

$f(x)$ רציפה במ"ש ב-$(0,\infty)$. יהי $0<\varepsilon$, אזי קיים $0<\delta$ כך שלכל $x,y\in(0,\infty)$ המקיימים $|x-y|<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. מביטוי $(*)$ נובע

$$|\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(y)}| < \frac{|f(x)-f(y)|}{2} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$ (עבור אותה δ)

זוהי בדיוק הגדרת רציפות במ"ש. מש"ל.

14/14

שאלה 5

א. צטט את משפט רול לגבי התאפסות הנגזרת בקטע.

ב. הוכח שלפונקציה $f(x) = 1 - (x-1)^{2/3}$ אין נקודה בקטע $[0,2]$ שבה הנגזרת מתאפסת. הסבר מדוע אין עובדה זו סותרת את משפט רול.

תשובה:

(א) משפט רול: תהי פונק' f גזירה בקטע (a,b) ורציפה ב- $[a,b]$ ומקיימת $f(a)=f(b)$.

אזי קיימת $c\in[a,b]$ כך ש- $f'(c)=0$. $\frac{11}{12}$

(ב) נגזור את f לפי נוסחת נגזרת כרגיל

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

עבור $x\in[0,1)$ קל לראות ש- $f'(x)>0$. עבור $x\in(1,2]$ $f'(x)<0$ נבדוק לפי הגדרה את $f'(1)$ באמצעות הנגזרות החד-צדדיות

$$f(1)=1 \Rightarrow f'_+(1) = \lim_{x\to1^+}\frac{1-(x-1)^{2/3}-1}{x-1} = \lim_{x\to1^+} -(x-1)^{-\frac{1}{3}} = -\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} -(x-1)^{-\frac{1}{3}} = \infty$$

אכן, רשמית צריך לבדוק לפי הגדרה. +1
אך כי זה לא שלא עשו זאת לא הורדתי.

קיבלנו בסה"כ: ב- $[0,1)$ $f'(x)>0$, ב- $(1,2]$ $f'(x)<0$, ב- $x=1$ $f'(x)\to\infty$ משמאל ו- $f'(x)\to-\infty$ מימין ולכן בסה"כ אין $x\in[0,2]$ עבורו $f'(x)=0$.

תוצאה זו אינה סותרת את משפט רול היות ש- f אינה גזירה בכל הקטע $[0,2]$, כי מצאנו שהגבול $\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ אינו קיים ב- $x=1$.

משל.

סה"כ $\frac{24}{24}$