

בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-01) - מועד א'

אוניברסיטת בר-אילן, יום ה', ז' אדר תשע"ה (26.2.15 למ')

מרצה: בועז צבאן.

מתרגלים: איתמר שטיין, ארז שיינר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו, פרט למחשבון פשוט.

הנחיות

א. יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם מוכרחים, אפשר להמשיך תשובה בגב אותו דף. לא לתקבל תשובה המשתרעת על פני יותר משני עמודים.

ב. משקל כל שאלה הוא 24 נקודות. בשאלות עם יותר מסעיף אחד, הנקודות מתחלקות בשווה בין הסעיפים. 4 נקודות מוקצות עבור סדר ונקיון הבחינה.

ג. הקף בעיגול, בטבלה הבאה, את מספרי השאלות שעליהן ענית.

ניקוד (לשימוש הבודקים)	ארבע השאלות שבחרתי (להקיף בעיגול)
	1
	2
	3
	4
	5
	סדר ונקיון
	סה"כ

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה. גם אם הדבר לא מצויין במפורש בשאלות, עליך לנמק את כל תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

הוכח את המשפט הבא: תהי פונקציה רציפה בקטע סגור $[a, b]$ המקיימת $f(a) < 0 < f(b)$. הוכח שקיים מספר c בקטע $[a, b]$ כך ש $f(c) = 0$.

תשובה:

שאלה 2

לכל אחד מהטורים הבאים, קבעו האם הוא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי, או מתבדר.

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 2n - 1}{4n^4 - 5n^2 - 6}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n!}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - 6 \sin n + 5}$

תשובה:

שאלה 3

יהיו $f(x), g(x)$ פונקציות המוגדרות בכל \mathbb{R} , ומקיימות $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, ובנוסף $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$.
א. נתבונן בפונקציה

$$.h(y) := \begin{cases} g(y) & y \neq b \\ c & y = b \end{cases}$$

הוכח: $\lim_{x \rightarrow a} h(f(x)) = c$.

ב. הפרך, על ידי דוגמא נגדית, את הטענה $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

תשובה:

שאלה 4

א. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הגדר את המינוח "הפונקציה $f(x)$ רציפה במידה שווה בתחום A ".
ב. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה במידה שווה בקרן $(0, \infty)$, המקיימת $1 < f(x)$ לכל $x \in (0, \infty)$.
הוכח שהפונקציה $\sqrt{f(x)}$ רציפה במידה שווה בקרן $(0, \infty)$.

תשובה:

שאלה 5

א. צטט את משפט רול לגבי התאפסות הנגזרת בקטע.

ב. הוכח שלפונקציה $f(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$ אין נקודה בקטע $[0, 2]$ שבה הנגזרת מתאפסת. הסבר מדוע אין עובדה זו סותרת את משפט רול.

תשובה: