

חידו"א 2 למדעי המחשב – תוספת בנושא אינטגרלים

ד"ר בועז צבאן, מכון אינשטיין למתמטיקה

ראשית, נפתור תרגיל נוסף בנושא אינטגרלים של פונקציות רציונליות (סעיף ו' בשאלה 1 של תרגיל 12).

$$\text{התרגיל: } \int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2} dx = ?$$

פתרון: כיון שמעלת המונה לא קטנה ממעלת המכנה, נבצע ראשית חלוקת פולינומים (עם שארית):

$$\frac{x}{x^3+x^2} \Big| x^2+x-2$$

$$\frac{x^3+x^2-2x}{2x}$$

$$\frac{x^3+x^2}{x^2+x-2} = x + \frac{2x}{x^2+x-2} \quad \text{לכן}$$

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2} dx = \int x dx + \int \frac{2x}{x^2+x-2} dx = \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int \frac{2x}{x^2+x-2} dx}_I$$

נותר איפוא לחשב את האינטגרל שסימנו באות I . נפרק את הפולינום במכנה: שורשיו הם

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

לכן $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, ולכן ניתן להציג

$$\frac{2x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

נכפיל את שני האגפים במכנה המשותף $(x-1)(x+2)$:

$$2x = A(x+2) + B(x-1)$$

$$\text{נציב } x=1: 2=A \cdot 3, \text{ לכן } A=\frac{2}{3}$$

$$\text{נציב } x=-2: -4=B \cdot (-3), \text{ לכן } B=\frac{4}{3}$$

לכן:

$$I = \int \frac{2x}{x^2+x-2} dx = \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{B}{x+2} dx = \int \frac{2/3}{x-1} dx + \int \frac{4/3}{x+2} dx = \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x-1} + \frac{4}{3} \int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + c$$

והתשובה הסופית היא, כאמור לעיל,

$$\frac{x^2}{2} + I = \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3} \ln|x-1| + \frac{4}{3} \ln|x+2| + c$$

אינטגרציה בעזרת נוסחת נסיגה (סעיף ב בשאלה 3 של תרגיל 12)

לעתים, כאשר אנו מבצעים אינטגרציה בחלקים מספר פעמים, אנו חוזרים כמעט לפונקציה שהתחלנו ממנה, אבל עם הבדל קטן שמבטיח שאם נחזור על התהליך מספיק פעמים נקבל פונקציה פשוטה מספיק, שאת האינטגרל שלה אנו יודעים. במקרה זה אין צורך לחזור באמת על התהליך, אלא יש לרשום כלל המתאר מה קורה בצעד אחד של התהליך, וממנו נקל למצוא את הדרוש. נראה, למשל, כיצד ניתן לחשב את $\int \sin^5 x dx$, ולמעשה את $\int \sin^n x dx$ לכל מספר טבעי n .

נסמן $G_n = \int \sin^n x dx$. נמצא כלל שמבטא את G_n בתלות בחלק מקודמיו $G_1, \dots, G_{n-1}$. נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$G_n = \int \sin^n x dx = \int \underbrace{\sin^{n-1} x}_u \underbrace{\sin x dx}_{dv}$$

אזי $du = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x dx$, וכן $v = -\cos x$ לכן

$$(*) \quad G_n = uv - \int v du = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \underbrace{\int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx}_I$$

באינטגרל I היינו מעדיפים שיופיעו רק $\sin$ -ים, כדי שנוכל לקשר אותו ל G_n . נשתמש איפוא בזהות $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ לקבל

$$I = \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx = \int \sin^{n-2} x dx - \int \sin^n x dx = G_{n-2} - G_n$$

נציב את I בזהות $(*)$:

$$\begin{aligned} G_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)I = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(G_{n-2} - G_n) = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)G_{n-2} - (n-1)G_n \end{aligned}$$

נחלץ את G_n :

$$G_n + (n-1)G_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)G_{n-2}$$

$$nG_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)G_{n-2}$$

$$\boxed{G_n = \frac{-\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} G_{n-2}}$$

קיבלנו נוסחת נסיגה, לחישוב G_n מתוך G_{n-2} . נראה כיצד משתמשים בזה:

ראשית, $G_1 = \int \sin^1 x dx = \int \sin x dx = -\cos x + c$ וכן $G_0 = \int \sin^0 x dx = \int 1 dx = x + c$.

מאלו נקבל את כל השאר בעזרת נוסחת הנסיגה. אם נציב $n=2$ בנוסחת הנסיגה נקבל:

$$\int \sin^2 x dx = G_2 = \frac{-\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2} G_0 = \frac{-\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} + c$$

אם נציב $n=3$ נקבל:

$$\int \sin^3 x dx = G_3 = \frac{-\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3} G_1 = \frac{-\sin^2 x \cos x}{3} + \frac{2}{3} (-\cos x) + c = \frac{-\sin^2 x \cos x}{3} - \frac{2 \cos x}{3} + c$$

ואם נציב $n=4$ נקבל:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx = G_4 &= \frac{-\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} G_2 = \frac{-\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{-\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2} \right) + c = \\ &= \frac{-\sin^3 x \cos x}{4} + \frac{-3 \sin x \cos x}{8} + \frac{3x}{8} + c \end{aligned}$$

(נשים לב שהשתמשנו בערך של G_2 , אותו חישבנו לעיל).

כך ניתן להמשיך ולחשב את $\int \sin^5 x dx$, $\int \sin^6 x dx$, וכולי.